This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

QL
35
.L4

ABREGÉ
DE
L'ARITHMETIQUE
ET DE
LA GÉOMÉTRIE
DE L'OFFICIER.

CONTENANT:

Les quatre premieres opérations de l'Arithmétique ; & les Régles de Trois & de Compagnie. Les principes de la Géométrie les plus utiles pour l'intelligence & la pratique des Fortifications, & pour lever des Cartes & des Plans ; le toisé des Surfaces, & un abregé de celui des Solides.

Par M. LE BLOND, Professeur de Mathématique des Pages de la Grande Ecurie du Roy, & des Pages de Madame la Dauphine.

A PARIS, QUAY DES AUGUSTINS,
Chez CH. ANT. JOMBERT, Libraire du Roy pour l'Artillerie & le Génie, au coin de la rue Gille-Cœur, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XLVIII.
Avec Approbation & Privilege du Roy.

AVERTISSEMENT.

4 1 28

26 Feb. 25 ENV

QUELQUE beſoin que les Militaires ayent de la Géométrie, tous les Livres qui traitent de cette Science ne ſont pas également propres à les engager d'*en faire l'objet* de leur application. Les gros volumes ne conviennent guéres à ceux qui n'ont pas contracté l'habitude d'étudier. Il leur faut des Traités qui joignent enſemble la clarté & la brieveté. On a tâché de réunir ces deux avantages dans *l'Arithmétique & la Géométrie de l'Officier*, qu'on vient de donner au public; mais comme cet ouvrage eſt trop étendu pour ceux qui n'ont pas le loiſir ou le deſſein de faire une étude ſérieuſe & ſuivie de la Géo-

History of sciences
Harrassowitz
4-29-24
9831

métrie, on a composé cet abregé de tout ce qui a paru le plus d'usage & le plus utile aux jeunes Officiers, pour les mettre en état d'étudier par régles & par principes les différentes parties de l'Art de la guerre.

On explique d'abord les quatre premieres opérations de l'Arithmétique ; enſuite les Regles de Trois & de Compagnie ſimples & compoſées. Une parfaite intelligence de ces Régles peut ſuffire dans les différens états de la vie. On eſt entré dans tout le détail néceſſaire pour les faire concevoir nettement & pour entrer dans les raiſonnemens qui en donnent la démonſtration.

Après l'Arithmétique ſuit la Géométrie. Elle contient les propoſitions les plus importantes pour

lever les Plans & les Cartes, arpenter ou meſurer les ſurfaces, & tracer des polygones réguliers ou irréguliers tant ſur le papier que ſur le terrain. On y trouvera auſſi un précis du toiſé des ſolides. Ceux qui auront bien compris tout ce que ce petit ouvrage renferme, pourront, *s'il peut* les exciter à acquerir une connoiſſance plus étendue de la Géométrie, étudier enſuite *l'Arithmétique & la Géométrie de l'Officier*, dont il peut être regardé comme l'extrait, & paſſer après cela aux autres traités de Mathematique plus compoſés. L'habitude de démontrer qu'ils auront acquiſe leur rendra la lecture de ces Traités aſſez aiſée : Car lorſqu'on poſſede bien l'art que les Géométres employent dans leurs démonſtrations, on eſt en état d'aller loin,

même ſans le ſecours d'un Maître ; qui ne ſert guéres à ceux qui ont le goût & l'uſage de l'application, que pour applanir les premieres difficultés & montrer la route qu'on doit tenir pour faire du progrès dans la carriere géométrique.

Cet Abregé eſt diviſé en différens articles, à la fin deſquels on a mis les Problêmes qui dépendent des principes qu'on y a expliqués, & qui en donnent l'uſage & l'application.

Toutes les propoſitions de cet Ouvrage ſont diſtinguées par des nombres. Ceux qu'on trouve à la marge précédés de la Lettre N. indiquent celles qui ſont marquées par ces mêmes nombres & qui ſervent à la démonſtration des autres propoſitions qui en dépendent & où elles ſont rappellées.

Approbation du Cenſeur Royal.

J'Ay lû par ordre de Monſeigneur le Chancelier un Manuſcrit, qui a pour titre, *l'Arithmétique & la Géométrie de l'Officier*, par M. le Blond. Il nous a paru que l'Auteur avoit bien rempli ſon objet en travaillant pour le Militaire, par les fréquentes applications qu'il fait de l'Arithmétique & de la Géométrie aux différens ſujets qui ont rapport à la Guerre, afin d'exciter l'émulation du Lecteur, à meſure qu'il apperçoit le fruit de ſon travail. A Paris le 27 Decembre 1746.

BELIDOR.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre: A nos amés & feaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conſeil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra, SALUT: Notre bien amé CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire à Paris, Nous a fait expoſer qu'il déſireroit faire imprimer & donner au Public des Ouvrages qui ont pour titre: *Les Mémoires de Monſieur de Puyſegur, Lieutenant Général. L'Art de la Guerre par regles & par principes, par Monſieur le Maréchal de Puyſegur. l'Arithmétique & la Géométrie de l'Officier; par M. le Blond.* S'il Nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Privilége pour ce néceſſaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Expoſant, Nous lui avons permis & permettons par ces Préſentes de faire imprimer leſdits Ouvrages en un ou pluſieurs Volumes, & autant de fois que bon lui ſemblera, & de les vendre, faire vendre, & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de quinze années conſécutives, à compter du jour de la date des Préſentes; faiſons défenſes à toutes perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance; comme auſſi à tous Libraires & Imprimeurs, d'imprimer, ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire leſdits Ouvrages, ni d'en faire aucuns Extraits ſous quelque prétexte que ce ſoit, d'augmentation, correction, & autres, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit

dudit Expoſant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de 3000 liv. d'amende, &c. à la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impreſſion deſdits Ouvrages ſera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément à la feuille imprimée, attachée pour modéle ſous le contre-ſcel des Préſentes; que l'Impétrant ſe conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725; & qu'avant de les expoſer en vente, les Manuſcrits & Imprimés qui auront ſervi de copie à l'impreſſion deſdits Ouvrages ſeront remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le ſieur Dagueſſeau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires de chacun dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier le ſieur Dagueſſeau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, le tout à peine de nullité des préſentes. Du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire joüir ledit Expoſant &c. Voulons que la copie deſdites Préſentes qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin deſdits Ouvrages ſoit tenue pour dûement ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conſeillers & Sécrétaires, foi ſoit ajoûtée comme à l'original. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent ſur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous Actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires: CAR tel eſt notre plaiſir. DONNE' à Paris le 12 jour du mois d'Octobre l'an de grace 1747, & de notre Regne le trente-troiſiéme. Par le Roi en ſon Conſeil.

SAINSON.

Regiſtré ſur le Regiſtre 11 *de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris*, N°. 850. *fol.* 742. *conformément aux anciens Réglemens, confirmés par celui du* 28 *Février* 1723. *A Paris le* 14 *Octobre* 1747.

G. CAVELIER, *Syndic.*

ABREGÉ D'ARITHMETIQUE ET DE GÉOMÉTRIE.

PREMIERE PARTIE.

CONTENANT L'ARITHMETIQUE.

I.

Des Principes de l'Arithmetique & de la Numération.

1. L'ARITMETIQUE eſt la ſcience des Nombres, ou l'Art de compter & de calculer.

2. Le *Nombre* eſt compoſé d'Unités, & l'*Unité* eſt une quantité déterminée,

qui, étant ajoutée pluſieurs fois à elle-même, forme le nombre, qui n'eſt ainſi qu'un amas d'Unités.

3. Les caracteres qu'on employe dans l'Arithmétique ne conſiſtent que dans les dix figures ſuivantes, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, qui ſe nomment *zero*, *un*, *deux*, *trois*, *quatre*, *cinq*, *ſix*, *ſept*, *huit*, & *neuf*. Par l'arrangement qu'on leur donne, on exprime tous les nombres qu'on peut imaginer, de même qu'avec les vingt-quatre lettres de l'Alphabet on écrit généralement tout ce que l'on veut.

4. Les caracteres de l'Arithmétique ſe nomment *Chiffres*. Le premier, ou le zero, n'a jamais aucune valeur propre. Il ſert ſeulement à faire valoir dix fois davantage les chiffres qui le précedent immédiatement à gauche.

5. Pour écrire un nombre quelconque avec les chiffres, on les poſe en ligne droite les uns à côté des autres. Le premier à droite exprime les unités; le ſecond, les dixaines de l'unité; le troiſiéme, les centaines de l'unité; le quatriéme, les mille; le cinquiéme, les dixaines de mille; le ſixiéme, les centaines de mille; le ſeptiéme, les millions; le huitiéme, les dixaines de millions; le

neuviéme, les centaines de millions; le dixiéme, les milliards; enſuite, les dixaines & les centaines de milliards; puis, les unités, les dixaines & les centaines de billiards, puis de même des trilliards, &c.

6. Ainſi, ſuivant cet arrangement, dix unités du premier chiffre à droite, n'en valent qu'une dans celui qui le précede immédiatement à gauche; & dix unités de celui-ci n'en valent de même qu'une de celui qui le précede de la même maniere; & ainſi de ſuite de tous les autres chiffres qui s'éloignent du premier, en allant vers la gauche.

7. Pour écrire par le moyen des chiffres un nombre quelconque, comme *trois mille quatre cens quarante-deux*, on commencera par écrire le dernier chiffre à gauche, qui exprime le plus grand nombre, lequel, dans l'exemple propoſé, eſt 3, qui doit être le quatriéme, en commençant à compter par le chiffre de la droite. On poſera donc d'abord un 3; & on le fera précéder vers la droite du nombre qui exprime les centaines, qui eſt ici 4; celui-ci du nombre qui exprime les dixaines de l'unité, qui eſt de même 4; & enfin ce dernier nombre ſera précédé vers la droite de celui qui

exprime les unités, qui eſt 2, dans cet exemple. Ainſi on aura le nombre propoſé *trois mille quatre cens quarante-deux*, exprimé en chiffres par 3442.

8. On peut conſiderer chacun de ces chiffres comme formant une colomne particuliere, & alors le premier de la droite marquera celle des unités; le ſecond, en allant de droite à gauche, celle des dixaines de l'unité; le troiſiéme, en allant de même vers la gauche, la colomne des centaines de l'unité; le quatriéme, celle des mille; & ainſi de ſuite, s'il y avoit plus de quatre chiffres.

9. Il ſuit de ce qu'on vient de dire, que, pour énoncer la valeur d'une quantité quelconque écrite avec des chiffres, il faut exprimer la valeur de chaque chiffre, ſuivant la colomne dans laquelle il ſe trouve placé.

Pour connoître la valeur de cette colomne, on commencera à compter les colomnes par celle des unités. On dira à cette colomne, unités, (ou, pour ſe ſervir de l'expreſſion qu'on employe ordinairement) *nombres*; à la ſeconde colomne, *dixaines*; à la troiſiéme, *centaines*; à la quatriéme, *mille*; à la cinquiéme, *dixaines de mille*; à la ſixiéme, *centaines de mille*, &c. On s'arrêtera

au dernier chiffre ; dont on exprimera la valeur rélativement à sa colomne, & successivement celle des autres chiffres, en revenant à la colomne des unités.

Par exemple, si le nombre proposé est formé de trois chiffres, comme 549, le 5 étant à la troisiéme colomne, qui est celle des centaines, vaut 500 ; le 4, qui est à celle des dixaines, vaut 40 ; & le 9, qui est à la colomne des unités, vaut simplement 9 unités. Ainsi on exprimera 549 par *cinq cens quarante-neuf*.

Si le nombre proposé est de quatre chiffres, comme 9704, on verra que le chiffre 9 étant à la colomne des milles, vaut neuf mille, & qu'ainsi il faudra énoncer 9704 par *neuf mille sept cens quatre*.

Remarque sur le Zero.

10. Le Zero n'ayant aucune valeur propre, comme on l'a déja dit, il ne sert qu'à marquer les colomnes qui n'ont point de nombres ; ou, ce qui est la même chose, à marquer la valeur des chiffres qui le précedent vers la gauche.

Car si l'on a un chiffre quelconque, comme 4, il ne vaut que quatre unités ; mais en mettant un zero à sa droite, il se

trouve alors à la colomne des dixaines ; & il vaut 40 ; ſi on lui en ajoute encore un à la droite du premier, il ſe trouvera à la colomne des centaines, & il vaudra 400.

11. D'où il ſuit qu'en plaçant un zero à la droite d'un nombre, on multiplie ce nombre par dix, & qu'on le multiplie par cent, ſi on lui en ajoute un ſecond ; par mille, ſi on lui en ajoute trois, &c.

12. Lors donc qu'on énoncera un nombre dans lequel il y aura un ou pluſieurs zero, on n'exprimera point les colomnes occupées par ces zero ; & de même, lorſqu'on aura un nombre à écrire, ou à marquer avec les chiffres, dans lequel toutes les colomnes intermédiaires n'auront point de valeur, on les remplira par des zero. Ainſi, pour marquer *quatre mille ſoixante & dix*, on écrira 4070.

13. Pour énoncer un nombre qui contient plus de quatre ou cinq chiffres, on le partagera de trois en trois par des points ou des virgules, en commençant par le chiffre de la droite ; c'eſt-à-dire, qu'on mettra le premier point entre les centaines & les mille ; le ſecond, entre les centaines de mille & les millions ; le troiſiéme, entre les centaines de millions, & les milliards, & ainſi de ſuite.

Par exemple, pour le nombre 378, 914, 501 composé de neuf chiffres, on mettra un point ou une virgule entre le 5 & le 4, & un autre entre le 9 & le 8; ce qui donnera trois divisions. La premiere à droite se terminera par les centaines; la seconde par les centaines de mille; & la troisiéme, par les centaines de millions; de sorte que la premiere tranche ou division de la gauche ne contient que des millions; la seconde, en allant de gauche à droite, des mille; & la troisiéme de la gauche ou la premiere de la droite, des unités; ce qui donne beaucoup de facilité pour exprimer tout d'un coup des nombres composés d'un grand nombre de chiffres; car il n'y a que la valeur des chiffres de chaque tranche à exprimer, c'est-à-dire, celle de 3 chiffres, en ajoutant au dernier, le nom des unités que contient chaque tranche; ainsi le nombre proposé 378, 914, 501, contenant trois tranches, on exprimera d'abord la premiere à gauche, qui est celle des millions; ensuite, celle des mille; puis celle des unités; de sorte qu'il sera exprimé par 378 *millions*, 914 *mille*, 501 *unités*.

14. L'énoncé de l'expression des nombres se nomme *la Numération*; &

après tout ce que l'on vient de dire ſur ce ſujet, il ſera aiſé d'énoncer la valeur de toutes ſortes de nombres marqués avec des chiffres, c'eſt-à-dire, de les *nombrer*, & de même de les écrire avec des chiffres; ce qui fait auſſi une partie de la Numération. Mais ce qu'il eſt eſſentiel de remarquer & de bien concevoir, c'eſt que toutes les opérations de l'Arithmétique ſont fondées ſur cette ſuppoſition arbitraire, *que chaque unité d'une colomne en vaut dix dans celle qui la ſuit immédiatement à droite, & au contraire que dix unités d'une colomne n'en valent qu'une dans celle qui la précede immédiatement à gauche.*

Pour donner encore plus de facilité à énoncer ou nombrer un nombre exprimé par beaucoup de chiffres, on terminera cet article par la Numération du nombre ſuivant,

774, 427, 328, 142, 759, 842, 560.

Nombre,
Dixaines,
Centaines.

Mille.
Dixaines de mille,
Centaines de mille.

Millions,
Dixaines de millions,
Centaines de Millions.

Milliards,
Dixaines de milliards,
Centaines de milliards.

Billiards,
Dixaines de billiards,
Centaines de billiards.

Trilliards,
Dixaines de trilliards,
Centaines de trilliards.

Quatrilliards,
Dixaines de quatrilliards,
Centaines de quatrilliards.

dont la valeur eſt de 774 *quatrilliards*, 427 *trilliards*, 328 *billiards*, 142 *milliards*, 759 *millions*, 842 *mille*, 560 *unités*.

II.

DE L'ADDITION.

15. L'*ADDITION* eſt une opération qui ſert à joindre pluſieurs nombres de même eſpéee, pour en former un ſeul qui les contienne tous, lequel ſe nomme la *ſomme* ou le *total* de tous les nombres propoſés.

Ainſi, *additionner* 26 & 39, c'eſt trouver 65, qui eſt la ſomme de 26 & 39.

Maniere de faire l'Addition.

16. Pour additionner pluſieurs nombres donnés ou propoſés, on les poſera les uns ſous les autres, de maniere que les unités répondent aux unités, ou qu'elles ſoient dans la même colomne; que les dixaines répondent aux dixaines, les centaines aux centaines, &c. on tirera enſuite une ligne droite ſous tous ces

nombres, & on commencera par ajouter enſemble les chiffres de la colomne des unités, & autant de fois qu'il y aura dix unités dans cette colomne, on retiendra autant de fois 1, pour porter dans la colomne ſuivante ; & on poſera dans la premiere colomne, ſous la ligne tracée, le nombre qui reſtera au-deſſus de ces dixaines, s'il y en a un ; ſinon, on y poſera un zero. On fera la même choſe pour l'addition de toutes les autres colomnes.

Soient, par exemple, les trois nombres, 456, 267 & 891 à additionner.

456
267
891
Somme 1614

On les poſera les uns ſous les autres, comme on vient de l'enſeigner, & on commencera par additionner la colomne des unités, en diſant, 6 & 7 font 13, & 1 font 14 ; ce qui donne 1 dixaine & 4 de plus. On poſera 4 dans cette même colomne, & on retiendra 1 pour la colomne ſuivante.

Paſſant à cette colomne, on dira 1 de retenu & 5 font 6, & 6 font 12, & 9 font 21 : on poſera 1 dans cette ſeconde colomne, & on retiendra 2 pour la troiſiéme.

Venant donc à cette colomne, on dira

2 de retenus & 4 font 16, & 2 font 8, & 8 font 16 : on posera 6, & on retiendra 1. Mais comme il n'y a pas de quatriéme colomne pour y porter cette unité, on la posera à côté de 6, vers la gauche, en disant, *j'avance* 1, & on aura 1614 pour la somme des trois nombres proposés.

Il est évident, par l'opération, que le nombre qu'on vient de trouver, contient la somme de toutes les unités, de toutes les dixaines, & de toutes les centaines des nombres proposés, & qu'ainsi il est égal à tous ces trois nombres pris ensemble.

REMARQUES.

I.

17. Il est indifférent de commencer à compter par les chiffres d'en haut, comme on vient de le faire, ou par les chiffres d'en bas. Mais si après avoir fait l'addition en comptant par le haut, on la refait en comptant par le bas, & qu'on trouve la même somme, on pourra regarder l'opération comme faite exactement & sans erreur, n'étant pas à présumer que l'on fasse la même faute en comptant différemment.

II.

18. Les moyens qu'on employe pour examiner ſi une opération eſt faite exactement, ſe nomment *ſa preuve*; & les raiſons dont on ſe ſert pour faire voir qu'en pratiquant ce qui eſt preſcrit pour l'opération d'une regle, elle répond à l'effet qu'on s'en propoſe, ſe nomment la *démonſtration de la regle*. Ainſi on a démontré l'opération de l'addition, lorſqu'on a fait voir, qu'en ſuivant ce que la regle preſcrit, la ſomme qui en réſulte contient toutes les parties des nombres propoſés, c'eſt-à-dire, qu'elle contient tous ces nombres.

En pratiquant ce qui a été preſcrit pour l'addition précédente, il ſera aiſé de faire toutes autres ſortes d'additions. Ainſi il ſuffira d'en mettre ici pluſieurs exemples.

PREMIER EXEMPLE.

	456789
	204567
	800005
	780916
Somme	2242277.

SECOND EXEMPLE.

247807
47234
378173
4567
327
25

Somme . . . . 678133.

TROISIE'ME EXEMPLE.

Si l'on a une armée compoſée de différentes Nations, comme de 10000 Hanovriens, 23550 Allemands, 27450 Ruſſiens, 11745 Anglois, & 10728 Hollandois, on trouvera le nombre d'hommes de toute l'armée en additionnant ces différens corps de troupes.

10000 Hanovriens.
23550 Allemands.
27450 Ruſſiens.
11745 Anglois.
10728 Hollandois.

Total de l'armée 83473.

DE L'ADDITION COMPOSE'E.

19. L'unité abſtraite ou *numérique* ſe con-

REMARQUE.

21. Comme il faut 2 dixaines de sols pour faire une livre, il est clair que la moitié des dixaines de sols donne tout d'un coup le nombre de livres qu'elles valent. Ainsi, quand le nombre en est *pair*, c'est-à-dire, qu'il se divise exactement en deux parties, sans reste, on pose zero dans l'addition, à la colomne des dixaines de sols, & l'on retient la moitié de ces dixaines, comme autant de livres qu'on porte aux livres. Si les dixaines de sols sont en nombre *impair*, c'est-à-dire, si l'on ne peut en prendre la moitié sans reste, comme, par exemple, s'il y en a 7, on prendra la moitié de 7 qui est 3, pour six, il restera 1 dixaine que l'on posera à la colomne des dixaines, & l'on retiendra 3 livres, c'est-à-dire, la moitié des dixaines paires que 7 contient, pour les porter aux livres, & l'on achevera l'addition comme dans l'exemple précédent.

Exemples

Exemples d'Additions composées.

	378#	13s	9d.
	107	11	11
	976	14	10
	387	15	9
	837	14	8
TOTAL	2688#	10s	11d.

	270#	00s	3d.
	457	10	9
	389	19	0
	175	18	10
	300	15	9
	37	01	3
TOTAL	1631#	05s	10d.

22. Si l'on a des toises, des piés, des pouces & des lignes à additionner ensemble, on les posera de même les uns sous les autres, comme on l'a fait pour les livres, les sols & les deniers, c'est-à-dire, les toises sous les toises, les piés sous les piés, &c. & sçachant que la *toise a 6 piés*, le *pié 12 pouces*, & le *pouce 12 lignes*, on fera cette addition comme celle des livres, sols & deniers.

23. Pour cela, on commencera l'addition par les lignes, & autant de fois qu'il y en aura 12, on retiendra autant de pouces pour porter à la colomne des pouces, posant à la colomne des lignes ce qui s'en trouvera de reste, après en avoir ôté tous les pouces qu'elles contiennent. S'il n'y a point de reste, on posera zero à cette colomne.

On additionnera de même tous les pouces auſquels on joindra d'abord ceux que l'addition des lignes aura donnés, & on retiendra pour la colomne des piés autant de piés qu'il y aura de fois 12 dans la somme de tous les pouces, posant, comme à la colomne des lignes, les pouces qui se trouveront exceder le nombre de fois 12 qu'ils contiendront.

Passant ensuite à la colomne des piés, on y portera d'abord ceux que les pouces auront donnés, qu'on joindra avec tous les autres piés, & l'on retiendra autant de toises pour la colomne des toises, que l'addition de tous les piés contiendra de fois 6. Si la somme de tous les piés contient plusieurs fois 6 avec un reste, on posera ce reste à la colomne des piés, ensuite on achevera l'addition de la même maniere que pour les livres, les sols & les deniers.

EXEMPLE.

24. Soient proposés à additionner les trois quantités, 345 toises, 4 piés, 8 pouces, 5 lignes; 297 toises, 2 piés, 6 pouces, 4 lignes; & 679 toises, 5 piés, 10 pouces, 10 lignes.

345	toises 4	piés 8	pouces 5	lignes.
297	— 2	— 6	— 4	
679	— 5	— 10	— 10	
TOTAL 1323	toises 1	pié 1	pouce 7	lignes.

Ayant posé les toises, les piés, les pouces, &c. les uns sous les autres, comme on le voit dans l'exemple figuré, on commencera par additionner les lignes, en disant 5 & 4 font 9 & 10 font 19, dans lequel nombre il y a une fois 12 & 7 de reste, c'est pourquoi on posera 7, & on retiendra 1 pour porter à la colomne des pouces.

Passant à cette colomne, on dira 1 de retenu & 8 font 9 & 6 font 15, & 10 font 25. Dans 25 il y a deux fois 12 & 1 de reste: on posera donc 1 à cette colomne, & on retiendra 2 pour la colomne des piés.

Allant ensuite à la colomne des piés,

on dira 2 de retenus & 4 font 6, & 2 font 8, & 5 font 13. Or, comme en 13 il y a deux fois 6 & 1 de reſte, on poſera 1 à cette colomne, & l'on portera les deux toiſes de retenue à la colomne des toiſes, diſant 2 & 5 font 7, &c. On achevera enſuite cette addition comme celle des livres, des ſols & des deniers; ce qui n'a aucune difficulté.

De l'Addition des autres eſpéces.

25. Quelques différentes choſes que l'on ait à additionner, on en trouvera toujours la ſomme en commençant l'opération par les plus petites parties dans leſquelles l'unité eſt diviſée; on paſſera de celles-ci à celles qui ſont immédiatement plus grandes, en leur ajoutant autant d'unités qu'on aura trouvé de fois, dans la premiere addition, le nombre de parties qu'elles contiennent des plus petites, & ainſi ſucceſſivement, juſqu'à ce que l'on ſoit parvenu aux entiers, qu'on additionnera comme dans tous les exemples qui précedent.

De la Preuve de l'Addition compoſée.

26. La Preuve des additions com-

fées se fera de la même maniere que celle des additions simples, c'est-à-dire, qu'après avoir fait l'opération en commençant à compter par les chiffres d'en haut, on la fera une seconde fois en commençant par les chiffres d'en bas. Il est évident qu'il doit se trouver la même somme dans chacune de ces additions différentes. On donnera dans la suite une preuve plus réguliere de cette opération.

III.

DE LA SOUSTRACTION.

27. LA *Soustraction* est une opération par laquelle on retranche un nombre d'un plus grand de même espece, pour en connoître la différence.

Ainsi retrancher ou *soustraire* 28 de 35, c'est ôter 28 de 35 pour trouver le nombre 7 qui est la différence de ces deux nombres. Cette différence ou cet excédent du plus grand nombre sur le plus petit, se nomme aussi quelquefois *le reste*.

Il est évident que le nombre qu'on veut retrancher d'un autre, doit tou-

jours être plus petit que ce nombre, n'étant pas poſſible, par exemple, de ſouſtraire 6 de 4, non plus que 12 de 9, &c.

28. Pour ſouſtraire d'un nombre tel qu'on voudra, un autre nombre plus petit, on poſera celui-ci ſous le plus grand, de maniere que les unités, les dixaines, les centaines, &c. de ces deux nombres, ſoient dans les mêmes colomnes, comme dans l'addition, & enſuite on retranchera de toutes les parties du nombre ſupérieur, celles de l'inférieur.

29. Par exemple, pour ſouſtraire de 6564, 2431, on poſera ce dernier nombre ſous le premier : ſçavoir, les unités ſous les unités, les dixaines ſous les dixaines, & après avoir tiré une ligne ſous le ſecond nombre, on dira, en commençant par les unités du plus grand nombre ; Qui de 4 ôte 1, reſte 3, qu'on poſera dans la colomne des unités. Enſuite, paſſant à la ſeconde colomne, on dira, qui de 6 ôte 3, reſte 3, qu'on poſera dans cette même colomne, comme on le voit dans l'exemple figuré. Paſſant à la colomne des centaines, on

	6564
	2431
Reſte	4133
Preuve	6564

dira qui de 5 ôté 4, reſte 1, qu'on poſera auſſi dans cette même colomne. Enfin étant parvenu à la derniere, on dira, qui de 6 ôte 2, reſte 4, qu'on poſera dans cette derniere colomne, à côté des autres reſtes; & l'on aura 4133 pour le reſte ou la différence des deux nombres propoſés.

Preuve de la Soaſtraction.

30. *Pour faire la preuve de cette regle*, il faut remarquer que la différence des deux nombres donnés, ou, ce qui eſt la même choſe, l'excédent du plus grand ſur le plus petit, étant ajoûté à ce nombre plus petit, doit le rendre égal au grand, & qu'ainſi ſi on a bien operé, l'addition du nombre 2431, & du reſte 4133, doit donner le nombre ſupérieur 6564. Faiſant donc cette addition, comme elle donne le nombre 6564, on doit en conclure que la ſouſtraction eſt faite exactement.

31. Lorſque les chiffres du nombre à ſouſtraire, ſe trouvent tous moindres que ceux du nombre dont ils doivent être ſouſtraits, comme dans l'exemple qu'on vient de voir, la ſouſtraction ſe fera toujours très-facilement, mais lorſ-

qu'il s'en trouvera de plus grands dans les colomnes du second, que dans les correſpondantes du premier, l'opération paroîtra avoir un peu plus de difficulté. Il faut donner le moyen de la rendre tout auſſi aiſée que celle du précédent exemple.

32. Soit le nombre 56234, dont on veut ſouſtraire 48956.

De	56234
ôter	48956
reſte	7278
Preuve	56234

On poſera le ſecond ſous le premier, comme dans l'exemple précédent, & on dira, commençant toujours l'opération par les unités, qui de 4 ôte 6, cela ne ſe peut, car on ne peut d'un nombre quelconque en retrancher ou ôter un plus grand. Pour faire l'opération, on prendra une unité ſur le 3 de la colomne des dixaines, laquelle étant portée ſur celle des unités, en vaudra 10, lequel nombre joint avec le 4 de cette colomne des unités, fait 14. Alors de 14 on peut en ôter 6, & il reſte 8, qu'on poſera dans la colomne des unités.

Paſſant à la ſeconde colomne, le chiffré 3 ne vaut plus que 2 unités de cette colomne, on dira donc, qui de 2 ôte

5, cela ne se peut. Il faudra prendre une unité sur le chiffre 2 de la troisiéme colomne, laquelle unité en vaudra 10 de la seconde. Ces 10 unités jointes aux deux qui restoient dans cette colomne, font 12. Or, qui de 12 ôte 5, reste 7, qu'on posera dans la seconde colomne.

Venant à la troisiéme, le chiffre 2 ne vaut plus qu'une unité. Ainsi il faut dire; qui de 1 ôte 9, cela ne se peut: il faut donc avoir recours à la quatriéme colomne, *prendre une unité* sur le 6 de cette colomne, *laquelle unité en vaudra* 10 de celle de la troisiéme. Ces 10 unités jointes avec celle qui restoit à cette troisiéme colomne, font 11, desquelles ôtant 9, reste 2, qu'on posera à la troisiéme colomne.

Allant après cela à la quatriéme colomne, le 6 ne vaut plus que 5 unités. Or, qui de 5 ôte huit, cela ne se peut. Il faut prendre une unité sur la cinquiéme colomne, *laquelle en vaudra* 10 sur la quatriéme, & ces 10 unités jointes avec les 5 qui restent à cette colomne, valant 15, on dira, qui de 15 ôte 8, reste 7, qu'on posera à cette colomne.

Etant ainsi parvenu à la cinquiéme colomne, qui dans cet exemple est la derniere, le 5 de cette colomne ne vaut

plus que 4 uninés ; c'eſt pourquoi on dira qui de 4 ôte 4, reſte zero, qu'on poſera ſi l'on veut ; & n'y ayant plus de chiffres dans le nombre ſupérieur, l'opération eſt achevée, & l'on a 7278 pour l'excédent ou la différence du premier ſur le ſecond.

On en fera la preuve comme dans le premier exemple ; c'eſt-à-dire, en ajoutant au ſecond nombre la quantité 7278 dont il differe du premier, & trouvant par l'addition ce premier, il s'enſuit que l'opération eſt exacte.

REMARQUES.

I.

33. La pratique de cette regle ſe concevra fort aiſément en ſe rappellant ce qu'on a vû dans la numération, je veux dire qu'une unité d'un nombre en vaut 10 ſur celui qui le précede immédiatement à droite.

II.

34. A l'égard de la démonſtration de l'opération, elle ſe tire clairement de la pratique qu'on y a obſervée ; car il eſt clair qu'en prenant la différence de toutes les parties du premier nombre, de

celles du ſecond, on a la différence du premier au ſecond.

Pour ſouſtraire de même de 90800, le nombre 17597, après les avoir poſés l'un ſur l'autre, comme dans les exemples qui précédent, on dira d'abord, qui de zero

Qui de 90800
ôte 17597
reſte 73203
Preuve 90800

ôte 7, *cela ne ſe peut*. On prendra une unité ſur *le 8 de la troiſiéme colomne*, laquelle étant poſée ſur *le* premier zero à ſa droite, vaudra 10 unités de la colomne de ce zero. Prenant enſuite une unité de ces 10, il en reſtera 9 à la ſeconde colomne, & l'unité priſe à cette ſeconde, en vaudra 10 à la premiere. Ainſi, après cet arrangement, on dira, qui de 10 ôte 7, reſte 3, qu'on poſera dans la premiere colomne.

Venant après à la ſeconde, ſur laquelle on a laiſſé 9 unités, on dira qui de 9 ôte 9, reſte zero, qu'on poſera ſous le 9 à l'ordinaire.

Etant parvenu à la troiſiéme colomne où le 8 ne vaut plus que 7, on dira, qui de 7 ôte 5, reſte 2, qu'on poſera auſſi ſous le 5.

Paſſant à la quatriéme, on dira qui de

zero ôte 7, cela ne ſe peut. Il faudra prendre une unité ſur le 9 de la cinquiéme colomne, laquelle unité en vaudra 10 ſur la quatriéme ; & dire enſuite, qui de 10 ôte 7, il reſte 3, qu'on poſera ſous le 7.

Enfin venant à la cinquiéme colomne où le 9 ne vaut plus que 8 unités, on dira, qui de 8 ôte 1, reſte 7, qu'on poſera dans cette cinquiéme colomne, & l'on aura 73203 pour la différence des deux nombres propoſés. On fera la preuve de cette opération comme dans les exemples précédens.

Si l'on a bien compris ce qui vient d'être pratiqué dans les deux derniers exemples, on ne trouvera aucune difficulté dans les autres qu'on pourra propoſer ; c'eſt pourquoi on ſe contentera d'en joindre ici pluſieurs, qui aideront encore les commençans à ſe rendre plus familiere la pratique de la Souſtraction.

Exemples de Souſtractions ſimples.

Qui de	9000471000
ôte	7178756784
reſte	1821714216
Preuve	9000471000

Qui de	171100011071
ôte	9875678797
reſte	7234332274
Preuve	171100011071

Qui de	800000000
ôte	170798340
reſte	629201660
Preuve	800000000

SOUSTRACTION COMPOSE'E.

35. *La Souſtraction compoſée*, eſt celle dans laquelle les entiers ſont accompagnés des parties de l'unité, comme les livres, de ſols & de deniers; les toiſes, de piés, pouces, &c.

36. Soit la ſomme de $4507^{\#}, 12^{s}, 4^{d}$ dont on veut ſouſtraire celle de $3678^{\#}, 18^{s}, 10^{d}$.

Qui de	$4507^{\#}-12^{s}-4^{d}$.
ôte	3678—18—10
reſte	828—13— 6
Preuve	$4507^{\#}-12^{s}-4^{d}$.

Après les avoir posées l'une sous l'autre, comme dans la Soustraction simple, on commencera l'opération par les plus petites parties dans lesquelles l'unité se divise, c'est-à-dire, dans cet exemple, par les deniers. On dira donc, qui de 4 deniers ôte 10, cela ne se peut. On prendra 1 sol sur le 2 de la colomne des sols, lequel vaut 12 unités de celle des deniers, & l'on dira 12 & 4 font 16, & qui de 16 ôte 10, reste 6, qu'on posera à la colomne des deniers.

Venant à la colomne des sols, dans laquelle le 2 ne vaut plus qu'une unité, on dira, qui de 1 ôte 8, cela ne se peut, mais prenant l'unité qui est aux dixaines des sols, elle vaudra 10 sols à la colomne des sols. Or 10 & 1 font 11; & qui de 11 ôte 8, reste 3, qu'on posera sous le 8, à la colomne des sols.

Venant après cela à la colomne des dixaines de sols, l'unité de cette colomne ne vaut plus rien. Or, qui de rien ôte 1, cela ne se peut. Il faudra donc passer à la colomne des livres, prendre une livre sur le 7 de cette colomne, laquelle livre portée aux dixaines de sols, en vaudra deux unités, & alors on dira, qui de 2 ôte 1, reste 1, qu'on posera à la colomne des dixaines de sols.

Cela étant fait, on paſſera aux livres où le 7 ne vaut plus que 6. On dira donc, qui de 6 ôte 8, cela ne ſe peut; & comme la colomne des dixaines eſt remplie par un zero, on prendra une unité ſur le 5 de celle des centaines, laquelle étant portée ſur les dixaines, vaudra 10 unités; prenant auſſi une unité de ces 10, & la portant à la colomne des unités, elle en vaudra 10. Or, 10 & 6 font 16, & qui de 16 ôte 8, reſte 8, qu'on poſera à la colomne des unités des livres; l'on achevera enſuite l'opération comme dans la ſouſtraction ſimple.

Pour retrancher de même de 40000#, 00ſ, 0℔, 27187#, 13ſ, 9℔.

	39999#– 19ſ– 12℔.
Qui de	40000 — 00 — 0
ôte	27187 — 13 — 9
reſte	12812#– 06ſ– 3℔.
Preuve	40000#– 00ſ– 0℔.

On les poſera les uns ſous les autres, à l'ordinaire; & comme il n'y a ni ſols, ni deniers dans le nombre ſupérieur, & que toutes les colomnes des entiers, à l'exception de la premiere à gauche, ſont remplies par des zero, il faudra

prendre une unité ſur le 4 de la cinquiéme colomne, laquelle étant portée ſur la quatriéme, en vaudra 10 de cette colomne. Il faudra enſuite prendre une unité des 10 de cette colomne, la porter ſur la troiſiéme, & alors il reſtera 9 unités à la quatriéme, & la troiſiéme vaudra 10 unités. On prendra une unité des 10 de cette troiſiéme, laquelle étant poſée à la ſeconde, en vaudra 10 de cette ſeconde, & il en reſtera ainſi 9 à la troiſiéme. Sur les 10 unités de la ſeconde colomne, on en prendra 1, qu'on portera ſur la premiere qui en vaudra 10 de cette premiere; il en reſtera 9 à la ſeconde, & alors la premiere colomne des livres vaudra 10 unités. On en prendra une, c'eſt-à-dire, une livre ou 20 ſols, dont on imaginera une dixaine de ſols au-deſſus des dixaines des ſols du nombre inférieur; puis 9 ſols à côté, & enfin un ſol ou 12 deniers au-deſſus des deniers du même nombre.

Enſorte que par cette diſpoſition le nombre ſupérieur 40000$^{\#}$, deviendra 39999$^{\#}$, 19^{s}, 12^{d}, ainſi qu'on l'a marqué en plus petit caractere au-deſſus. On en retranchera l'inférieur, comme dans l'exemple précédent, diſant: Qui de 12 deniers ôte 9, reſte 3, qu'on

posera aux deniers. Puis, qui de 9 sols ôte 3 sols, reste 6 sols, qu'on posera aux sols. Ensuite, qui d'une dixaine de sols ôte une dixaine pareille, reste zero qu'on posera aux dixaines de sols; passant ensuite aux livres, qui de 9 ôte 7, reste 2, &c.

37. Pour soustraire de 454 toises 2 piés 6 pouces 3 lignes, 367 toises 5 piés 8 pouces 7 lignes, on les posera l'un sous l'autre, comme on vient de le faire pour les *livres*, les sols & les deniers, & on dira : Qui de 3 *lignes* en ôte 7,

Qui de	454 toises	2 piés	6 pouces	3 lignes.
ôte	367 —	5 —	8 —	7
reste	86 —	2 —	9 —	8.
Preuve	454 toises	2 piés	6 pouc.	3 lignes.

cela ne se peut : on prendra un pouce à la colomne des pouces qui vaut 12 lignes; & comme 12 & 3 font 15, on dira, qui de 15 ôte 7, reste 8 qu'on posera aux lignes.

Passant à la colomne des pouces, dans laquelle le 6 ne vaut plus que 5, on dira : Qui de 5 ôte 8, cela ne se peut; on prendra un pié sur la colomne des piés, lequel vaut 12 pouces; & comme 12

& 5 font 17, on dira, qui de 17 pouces en ôte 8, reſte 9, qu'on poſera à la colomne des pouces.

Allant enſuite à la colomne des piés, dans laquelle le 2 ne vaut plus qu'une unité, on dira: Qui de 1 ôte 5, cela ne ſe peut: on prendra une unité ſur le 4 des unités des toiſes, laquelle valant 6 piés, on dira 6 & 1 font 7, & qui de 7 ôte 5, reſte 2, qu'on poſera à la colomne des piés.

On paſſera après cela à la colomne des toiſes où le chiffre 4 des unités ne vaut plus que 3, & l'on achevera l'opération de la même maniere que les précédentes.

Application de la Souſtraction à des Exemples.

PREMIER EXEMPLE.

38. *UN Particulier eſt né en l'année 1678 le 25 Mai, on demande quel eſt ſon âge le 16 Juillet 1746.*

Il eſt clair que l'âge de ce Particulier n'eſt autre choſe que la différence du 16 Juillet 1746, au 25 Mai 1678, & qu'ainſi, pour le trouver, il faut ſouſtraire le ſecond du premier.

Pour arranger cette soustraction, je pose d'abord 1746 années, 6 mois & 16 jours, parce qu'au 16 Juillet il y a 6 mois de l'année écoulés, plus 16 jours; sous ce nombre je pose 1678, 4 mois & 25 jours, parce qu'au 25 Mai il y avoit 4 mois & 25 jours de l'année d'écoulés.

Qui de	1746	années 6	mois 16	jours.
ôte	1678	— 4	— 25	
reste	68	années 1	mois 21	jours.
Preuve	1746	années 6	mois 16	jours.

Je dis ensuite : Qui de 16 jours ôte 25 jours, cela ne se peut, c'est pourquoi je prends un mois à la colomne des mois, lequel vaut 30 jours ; & comme 30 & 16 font 46, je dis : qui de 46 ôte 25, il reste 21, que je pose à la colomne des jours.

Passant à celle des mois, je dis : Qui de 5 mois ôte 4 mois, reste 1 mois, que je pose aux mois.

Allant après cela à la colomne des années, on achevera la regle à l'ordinaire, & l'on aura 68 années 1 mois & 21 jours pour l'âge demandé.

REMARQUES.

I.

39. Au lieu de 1746 dans le nombre ſupérieur, il auroit fallu mettre 1745, parce que l'année 1746 n'eſt révolue qu'au dernier Décembre 1746. Ainſi on a mis une année de trop dans ce nombre ; mais comme on en a mis auſſi une de trop par la même raiſon dans l'inférieur, la différence de ces deux nombres eſt la même que celle qu'on auroit trouvée en les diminuant chacun d'une unité.

II.

40. Si le nombre des mois du nombre ſupérieur avoit été moindre que celui de l'inférieur, on auroit pris une unité ſur la colomne des années, c'eſt-à-dire, qu'on auroit pris 12 mois qu'on auroit ajoutés avec les mois du nombre ſupérieur, après quoi l'opération n'auroit plus eu aucune difficulté.

SECOND EXEMPLE.

ON ſuppoſe une armée de 56700 hommes, & que dans une bataille il y en ait eu 3745 de tués, on demande le reſte du nombre de l'armée.

Il eſt évident qu'il faut ſouſtraire le ſecond nombre du premier, & que le reſte donnera le nombre d'hommes dont l'armée eſt compoſée après la bataille,

Qui de	56700	*hommes.*
ôte	3745	*hommes.*
reſte	52955	*hommes.*
Preuve	56700	*hommes.*

TROISIE'ME EXEMPLE.

IL a été mené 1411200 *livres de poudre au dernier ſiége de Turin ; il en eſt reſté* 234440 *livres, on demande quel eſt le nombre de livres de poudre qui a été conſommé à ce ſiége.*

Il eſt clair qu'il ne faut que ſouſtraire des poudres menées devant Turin, la quantité qui en eſt reſté, & que le reſte ou la différence de ces deux quantités, donnera celle de la conſommation qu'on demande.

Qui de	1411200	*livres de poudre.*
ôte	234440	
reſte	1176760	*liv. pour la conſomm.*
Preuve	1411200	

De la Preuve de l'Addition par la Souſtraction.

41. Dans l'article de l'addition on n'a pû donner cette preuve, parce qu'on n'avoit point encore parlé de la Souſtraction qu'elle ſuppoſe. Mais comme la Souſtraction eſt la véritable preuve de l'Addition, & que par cette raiſon on ne doit pas l'ignorer, on va ſuppléer ici en peu de mots à l'omiſſion qu'on en a faite.

A.	4274	13	4
. . . . .			
B.	8756	14	11
C.	8709	10	10
D.	9877	17	7
E.	8756	19	9
G.	40375	16	5
H.	36101	03	1
K.	4274	13	4

Soit le nombre marqué par G, l'addition ou la ſomme des nombres marqués par A, B, C, D & E. Si l'opération eſt exacte, G doit être égal à tous les nombres A, B, C, &c.

Soit faite enſuite une ſeconde addition de B, C, D & E, dans laquelle on ne comprenne point le nombre A, qu'on a pour cela ſéparé des autres par une ligne ponctuée, & ſoit H la ſomme de cette ſeconde addition, il eſt évident qu'elle doit être plus petite que la premiere du nombre A, qu'on n'y a point compris; enſorte que G doit ſurpaſſer H de la quantité A.

C'eſt pourquoi, ſi l'opération eſt exacte, ôtant de G le nombre H, on doit trouver le nombre A. Faiſant donc la ſouſtraction, on a le nombre K de 4274tes 13^{l} 4^{d}. Or le nombre A eſt la même choſe, donc l'addition a été faite ſans erreur, c'eſt-à-dire, que G eſt la ſomme des nombres A, B, C, D & E.

REMARQUE.

42. L'Addition & la Souſtraction ſe ſervent réciproquement de preuve; car la Souſtraction a été prouvée par l'Addition, puiſqu'on la faite en ajoutant au moindre nombre la différence au plus grand, & l'on vient de voir que la Souſtraction ſert également de preuve à l'Addition.

IV.

DE LA MULTIPLICATION.

43. MULTIPLIER un nombre par un autre, c'eſt prendre le premier autant de fois que l'unité eſt contenue dans le ſecond.

Ainſi multiplier 4 par 3, c'eſt prendre 4 trois fois, ou, ce qui eſt la même choſe, c'eſt trouver le nombre 12 qui contient autant de fois 4 qu'il y a d'unités dans 3, c'eſt-à-dire, 3 fois.

44. Le nombre que l'on multiplie ſe nomme le *Multiplié* ou le *Multiplicande*. Celui par lequel on le multiplie ſe nomme le *Multiplicateur*; & le troiſiéme nombre qu'on trouve par la multiplication des deux premiers, ſe nomme *le produit*.

Dans l'exemple de la Multiplication de 4 par 3, 4 eſt le Multiplicande, 3 le Multiplicateur, & 12 le produit.

REMARQUE.

45. Pour n'être point embarraſſé dans la

la Multiplication, il eſt abſolument néceſſaire de ſçavoir multiplier par cœur tout nombre plus petit que 10 par tout nombre auſſi au-deſſous de 10, c'eſt-à-dire, le produit de tous les nombres depuis 1 juſqu'à 10.

La Table que l'on joint ici peut ſervir à apprendre en fort peu de tems la multiplication de ces nombres. Il eſt à propos, en opérant, d'en avoir une devant ſoi pour la conſulter, juſqu'à ce que ces petites multiplications d'un chiffre par un autre chiffre, ſoient devenues familieres.

TABLE.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

46. Pour faire uſage de cette Table, il faut chercher dans le rang ſupérieur le

chiffre que l'on veut multiplier ; & dans la premiere colomne à gauche, celui par lequel on veut le multiplier. On trouvera le produit de ces deux chiffres dans la caze qui ſera commune à la colomne du Multiplicande & au rang du Multiplicateur.

Par exemple, pour multiplier 8 par 7 ; on cherchera 8 dans le rang du haut de la Table, & 7 dans la premiere colomne de la gauche : on parcourera enſuite le rang où eſt 7, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à la caze 56, qui répond à la colomne de 8 & au rang de 7. Le nombre 56 de cette caze ſera le produit de 8 par 7. Il en ſera de même de tous les autres produits depuis 1 fois 1 juſqu'à celui de 9 par 9, qui eſt 81.

PRATIQUE DE LA MULTIPLICATION.

47. Pour multiplier tel nombre qu'on voudra, comme par exemple, 345 par un autre quelconque 6, on poſera le multiplicateur 6 ſous le chiffre 5 des unités du multiplicande ; & l'on tirera enſuite une ligne ſous ces deux nombres.

345
6
Produit 2070

On dira après cela, 6 fois 5 font 30. On posera 0 à la colomne des unités, & l'on retiendra 3 pour la colomne suivante.

On multipliera de même le chiffre 4 des dixaines du multiplicande par 6, en disant, 6 fois 4 font 24, & 3 de retenues font 27. On posera 7 à la seconde colomne, & on retiendra 2 pour la suivante.

On passera à la troisiéme colomne; & on dira, 6 fois 3 font 18, & 2 de retenu font 20. On posera zero à la colomne des centaines; & comme il n'y a plus de chiffres à multiplier dans le multiplicande, on avancera 2 pour former une quatriéme colomne : ainsi on aura 2070 pour le produit de 345 par 6.

DEMONSTRATION.

Il est clair par l'opération, que l'on a multiplié tout le nombre 345 par 6, puisque toutes ses parties l'ont été par ce même nombre.

48. Pour multiplier de même 1781 par 24, on posera ces nombres; sçavoir, le multiplicateur 24 sous le multiplicande, & de maniere que les unités soient sous les unités, & les dixaines sous les dixaines.

Après avoir tiré une ligne ſous ces deux nombres, on dira, en commençant à multiplier les unités du multiplicande par celles du multiplicateur, ce qui ſe pratiquera toujours, on dira, dis-je, 4 fois 1 font 4, & on poſera 4 à la colomne des unités. Paſſant enſuite aux dixaines du multiplicande, on dira, 4 fois 8 font 32 : on poſera 2 à la ſeconde colomne, & l'on retiendra 3. Allant après aux centaines du multiplicande, on dira, 4 fois 7 font 28, & 3 de retenus font 31. On poſera 1 à la troiſiéme colomne, & on retiendra 3 unités pour la ſuivante, à laquelle étant parvenu, on dira, 4 fois 1 font 4, & 3 de retenus font 7, on poſera 7 à cette quatriéme colomne. On aura alors 7124 pour le produit du multiplicande par 4.

	1781
	24
	7124
	3562.
Produit	42744

On multipliera après cela ce même multiplicande par le ſecond chiffre du multiplicateur. Pour cet effet on dira, 2 fois 1 font 2, qu'on poſera à la ſeconde colomne du premier produit, c'eſt-à-dire, dans la même que celle du chiffre 2 par lequel on multiplie. On dira

enſuite, paſſant à la ſeconde colomne du multiplicande, 2 fois 8 font 16, on poſera 6 à la troiſiéme colomne du produit, & on retiendra 1. Allant après à la troiſiéme colomne du multiplicande, on dira, 2 fois 7 font 14, & 1 de retenu font 15; on poſera 5 à la quatriéme colomne du produit, & l'on retiendra 1 pour la ſuivante. Etant enfin parvenu à la derniere colomne du multiplicande, on dira, 2 fois 1 font 2, & 1 de retenu font 3, & on poſera 3 en l'avançant vers la gauche pour former une cinquiéme colomne au produit. On mettra un point ſous le chiffre 4 des unités du premier produit, qui ſervira à marquer plus exactement que le premier chiffre du ſecond produit eſt à la ſeconde colomne du premier, & l'on aura pour ce ſecond produit 35620.

On tirera une ligne ſous ces deux produits, après quoi on les additionnera enſemble, & l'on trouvera 42744 pour le produit total.

Remarques.

I.

49. Quelque nombre de chiffres qu'il y ait dans le multiplicateur, on multi-

pliera ſucceſſivement tout le multiplicande par chacun de ces chiffres, & l'on aura ainſi autant de produits particuliers qu'il y aura de chiffres dans le multiplicateur.

I I.

50. On obſervera toujours de mettre le premier chiffre du produit de chacune des multiplications partiales, ſous le chiffre du multiplicateur, par lequel ce produit eſt formé, & d'avancer enſuite les autres ſucceſſivement ſous les colomnes qui vont de droite à gauche.

Par exemple, ſi on ſuppoſe que le multiplicateur a 4 chiffres, le premier chiffre du produit du premier chiffre du multiplicateur par celui du multiplicande, ſera poſé à la colomne des unités; celui du ſecond chiffre du multiplicateur par le premier du multiplicande ſera mis à la colomne des dixaines; le premier chiffre du produit du troiſiéme du multiplicateur par le premier du multiplicande, ſera mis à la colomne des centaines; & enfin celui du quatriéme chiffre du même multiplicateur par le premier du multiplicande, à la quatriéme colomne; & ainſi de ſuite, ſi le multiplicateur avoit au plus grand nombre de chiffres. L'on

marquera par des points ou des zero les colomnes des unités, des dixaines, des centaines, &c. laiſſées vers la droite au-devant des produits du ſecond, du troiſiéme, &c. chiffres du multiplicateur par le premier du multiplicande.

51. La raiſon de cet arrangement conſiſte, en ce que le produit d'un chiffre quelconque du multiplicateur par celui des unités du multiplicande, eſt toujours de la même nature de celui du multiplicateur; c'eſt-à-dire, que ſi le chiffre du multiplicateur, eſt aux dixaines, ce produit donne des dixaines, & qu'il donne des centaines s'il eſt aux centaines, &c. ce qui eſt évident. Car, par exemple, le troiſiéme chiffre du multiplicateur, qui eſt aux centaines, multiplié par le chiffre des unités du multiplicande, produit des centaines. Son quatriéme, qui eſt à la colomne des milles, produit des milles, multiplié par le même premier chiffre du multiplicande. Donc il faut placer le premier chiffre de ces produits à la colomne des centaines des milles, &c. c'eſt-à dire, dans la même colomne qui eſt occupée par le chiffre du multiplicateur par lequel on multiplie le multiplicande.

III.

52. Lorſqu'il ſe trouve des zero à la droite du multiplicande & du multiplicateur, on multiplie ſeulement enſemble les chiffres de chacun de ces deux nombres, & on ajoute à leur produit autant de zero qu'il y en a à la droite de chacun d'eux.

Par exemple, pour multiplier 4800 par 600, on multiplera ſeulement 48 par 6, & on ajoutera 4 zero au produit, qui ſera ainſi de 2880000.

48
6
Produit 2880000

Pour faire voir la raiſon de cette opération abregée, il n'y a qu'à multiplier à l'ordinaire 4800 par 600, & alors comme le chiffre 6 du multiplicateur eſt aux centaines, ſon produit par le premier chiffre du multiplicande, doit être auſſi à la même colomne. Pour cela il faut faire précéder ce produit des 2 zero qui précédent 6, & alors multipliant 4800 par 6, on aura d'abord 6 fois zero qui font zero, qu'on poſera à la troiſiéme

4800
600
Produit 2880000

colomne

colomne, & encore enſuite 6 fois zero qui ſont de même zero, qu'on poſera à la quatriéme colomne. Puis 6 fois 8 qui font 48 : on poſera 8 à la cinquiéme colomne, & l'on retiendra 4 pour la ſixiéme : enſuite 6 fois 4 font 24, & 4 de retenus, font 28, on poſera 8 à la ſixiéme colomne, & l'on avancera 2 à la ſeptiéme. Or ce produit eſt 2880000, c'eſt-à-dire, le même qu'on a d'abord eu en multipliant 48 par 6, & en ajoutant à leur produit la ſomme des zero de la droite de chacun de ces nombres.

53. Il ſuit de-là, que pour multiplier un nombre quelconque par un autre compoſé de l'unité ſuivie de pluſieurs zero, comme par 10, 100, 1000, &c. il ne faut que placer à la droite du multiplicande les zero du multiplicateur.

I V.

54. *Le zero ou le rien ne peut multiplier aucun nombre*; car 5 fois rien ou 1000 fois rien ne font rien : c'eſt pourquoi lorſqu'il s'en trouve parmi les chiffres du multiplicateur, & qu'on eſt parvenu à leur colomne, on paſſe tout de ſuite à la ſuivante.

Soit par exemple 455 à multiplier

455
304
1820
1365..
Produit 138320

par 304. On multiplera d'abord le multiplicande par 4, ce qui donnera le premier produit 1820. Mais comme à la seconde colomne du multiplicateur il se trouve un zero, & que zero multiplié par 5 ne fait rien, il faut passer au troisiéme chiffre 3 du multiplicateur, & dire, 3 fois 5 font 15, observant de poser 5 dans la colomne du 3, c'est-à-dire, à la troisiéme colomne, & de retenir une unité pour continuer l'opération en allant vers la gauche, &c.

55. Lorsqu'il se trouve aussi des zero parmi les chiffres du multiplicande, & qu'on est parvenu à une colomne occupée par un zero, on met dans la colomne du produit, qui répond à ce zero, les unités qu'on retient de la multiplication du chiffre précédent; & si l'on ne retient rien, on met zero dans cette colomne.

Par exemple, soit 3005 à multiplier par 350. Après avoir écrit le multiplicateur 350 sous le multiplicande, & posé zero, pour marquer la colomne des unités du produit, à cause que le premier chiffre du multiplicateur est zero, &

qu'ainsi il faut commencer la multiplication par son second chiffre 5, on dira ensuite, 5 fois 5 font 25: on posera 5 à la seconde colomne, & l'on retiendra 2 unités pour la suivante. On dira après cela, cinq fois zero font zero, & 2 de retenus font 2. On posera 2 à la troisiéme colomne, & l'on passera à la suivante, en disant, 5 fois zero ne font encore rien; & comme on ne retient rien, on posera zero à la quatriéme colomne. Passant à la quatriéme du multiplicande, on dira, 5 fois 3 font 15, on posera 5 à la cinquiéme colomne du produit, & l'on avancera 1 à la sixiéme.

3005	
350	
150250	
9015..	
Produit 1051750	

On passera après au chiffre 3 des centaines du multiplicateur; & l'on dira, 3 fois 5 font 15. On posera 5 à la colomne des centaines, c'est-à-dire, dans celle du multiplicateur 3, & l'on retiendra 1. Ensuite 3 fois zero ne font rien, mais un de retenu fait 1, qu'on posera à la quatriéme colomne, puis encore 3 fois zero ne font rien; & comme on ne retient rien, on posera zero à la cinquié-

me colomne du produit ; & enfin 3 fois 3 font 9, on posera 9 à la sixiéme colomne du produit, & l'on aura pour le second produit 901500, avec lequel on additionnera le premier, & l'on aura 1051750 pour le produit total.

Sur la Preuve de la Multiplication.

56. La Preuve de la multiplication se fait par une autre opération qu'on appelle *Division*, dont on parlera dans la suite : mais en attendant, voici un moyen fort simple de s'assurer de l'exactitude de l'opération.

Ce moyen consiste, après avoir fait la multiplication d'un nombre par un autre, d'en faire une nouvelle avec le même multiplicande, mais avec un multiplicateur double. Il est clair que cette seconde multiplication doit donner un produit double de la premiere, & qu'ainsi la moitié de ce produit doit être égale à celui de la premiere multiplication.

Soit, par exemple, 5303 à multiplier par 374. Ayant fini l'opération & trouvé 1983322 pour le produit, on posera à part le multiplicateur 374, & on le multipliera par 2 ; ce qui donnera 748 pour celui de la seconde opération.

On multipliera donc le même multiplicande 5303 par 748, & l'on aura le produit 3966644, dont on prendra la moitié, en commençant par le premier chiffre de la gauche, disant : la moitié de 3 est 1 pour 2, il reste 1 unité, qui étant posée à côté sur le 9 voisin, vaut 10, & jointe avec ce 9, fait 19, dont la moitié est 9 pour 18, on posera 9 sous le 9. Il reste encore une unité, qui étant portée sur la colomne suivante, vaut aussi 10 unités de cette colomne, lesquelles jointes au 6 qui s'y trouve, font 16, dont la moitié est 8, qu'on posera sous le 6. On continuera ensuite à prendre la moitié des autres chiffres du même pro-

	5303
	374
	21212
	37121.
	15909..
Produit	1983322

Pour la Preuve.

	374
	2
	748
	5303
	748
	42424
	21212.
	37121..
	3966644
Preuve	1983322

duit, en disant, la moitié de 6 est 3; qu'on posera sous le 6 : puis encore la moitié de 6 est 3 : ensuite la moitié de 4 est 2, puis la moitié de 4 est encore 2, & l'on aura ainsi pour la moitié du produit de la seconde multiplication 1983322, c'est-à-dire, le produit de la premiere multiplication, ce qui prouve que chacune de ces opérations est exacte.

REMARQUE.

57. Il est clair que cette preuve peut être variée de différentes manieres. On auroit pû doubler le multiplicande; & laissant le même multiplicateur, on auroit eu de même dans la seconde opération un produit double de celui de la premiere. En doublant le multiplicande ou le multiplicateur, & prenant la moitié de celui de ces deux termes qu'on n'aura pas doublé, il est évident aussi qu'on auroit eu le même produit que celui de la premiere opération.

Après tout le détail dans lequel on est entré jusqu'ici sur la pratique de la multiplication, il suffira de donner quelques exemples pour rendre cette pratique familiere, & pour faire voir l'observation de tout ce qui a été prescrit pour cette opération.

Exemples de Multiplications ſimples.

I.

58. *La circonférence de la terre ſe meſure par celle d'un grand cercle qui eſt diviſé en 360 parties égales, qu'on nomme* DEGRE'S. *Chaque degré eſt de 25 lieues : on demande combien la circonférence de la Terre a de lieues.*

360 25 1800 720. *Réponſe* 9000 lieues.	Il eſt clair qu'il faut multiplier 360 par 25, & que le produit 9000, ſera la quantité de lieues du tour de la terre.

I I.

59. *L'*ANNE'E *Julienne ou commune eſt de 365 jours 6 heures, on demande combien elle a d'heures.*

Sachant que le jour eſt de 24 heures ; on multipliera 365 par 24, & on ajoutera 6 à la colomne des unités des produits, enſuite on en fera l'addition, qui donnera 8766 pour le nombre des heures de l'année.

	365
	24
	1460
	730.
	6
Réponſe	8766 h.

III.

60. *On ſuppoſe une armée compoſée de 50 bataillons de 650 ſoldats chacun & de 84 eſcadrons de 140 Cavaliers, on demande quel eſt le nombre d'hommes de cette armée.*

	50 *Batail.*	à	84 *Eſc.*
	650 *hom.*		140 *Cav.*
	2500		3360
	300..		84..
Sold.	32500	*Cav.*	11760
Cav.	11760		
Tot.	44260 *hom.*		

On multipliera les 50 bataillons par 650, & l'on aura 32500 pour le nom-

bre d'hommes qu'ils contiennent.

On multipliera de même les 84 escadrons par 140, & l'on aura 11760 pour le nombre de Cavaliers de l'armée : on additionnera après cela les Soldats & les Cavaliers, & leur somme 44260 donnera le nombre d'hommes de toute l'armée.

I V.

61. *On suppose qu'un Particulier a 25# à dépenser par jour, on demande à quoi se monte son revenu par an.*

	365 jours	Il y a 365 jours dans l'année, il faut donc multiplier ce nombre de jours par 25, & le produit donnera le nombre demandé.
à	25#	
	1825	
	730.	
Réponse	9125#	

V.

62. *On demande combien 325 louis de 24# font de livres.*

	325 louis	Il faut multiplier 325 par 24, & le produit 7800# sera le nombre de livres que valent 325 louis à 24# chacun.
à	24#	
	1300	
	650.	
Réponse	7800#	

V I.

63. *ON demande combien il y a de ſols dans* 725#

	725#	La livre vaut vingt ſols. Il faut donc multiplier 725 par 20, & le produit 145000 ſera le nombre de ſols que font 725#.
à	20ſ	
Réponſe	14500ſ	

V I I.

64. *SAVOIR combien la livre de vingt ſols contient de deniers.*

	20ſ	La livre vaut 20 ſols, & le ſol 12 deniers, il faut donc multiplier 20 par 12, & le produit 240 ſera le nombre de deniers que contient la liv.
à	12d.	
	40	
	20.	
Réponſe	240d.	

65. Il ſuit de-là, que, pour changer des livres en deniers, il faudra les multiplier par 240.

V I I I.

66. *LE Muid d'avoine contient* 12

ſeptiers, 24 boiſſeaux; ſçavoir le nombre de boiſſeaux que contient le Muid.

	12 Septiers.	Il eſt clair qu'il faut multiplier 12 par 24, & que le produit 288, donnera le nombre des boiſſeaux du Muid d'avoine.
à	24 Boiſſeaux.	
	48	
	24	
	288 Boiſſeaux.	

Tous ces exemples ſont plus que ſuffiſans pour mettre en état de réſoudre toutes les queſtions qui concerneront la multiplication ſimple. On va paſſer à la compoſée, c'eſt-à-dire, à celle dans laquelle le multiplicateur eſt formé d'unités & de parties d'unités.

MULTIPLICATION COMPOSÉE.

67. Soit le nombre 275 à multiplier par 25# 15ſ.

	275
	25# — 15ſ.
	1375
	550.
Pour 10ſ.	137# — 10ſ.
Pour 5ſ.	68# — 15ſ.
	7081# — 5ſ.

On posera le multiplicateur sous le multiplicande, comme on le voit ici, & on fera d'abord la multiplication par les entiers du multiplicateur, c'est-à-dire, par 25.

On viendra ensuite à la multiplication des sols. Pour la faire, on remarquera que si l'on avoit à multiplier le multiplicande par 1 livre, le produit seroit le même que le multiplicande, & que comme 15 sols n'est que les trois quarts de 20 sols ou d'une livre, le produit de 275 par 15 sols, doit être les trois quarts de ce qu'il seroit par une livre.

Pour prendre les trois quarts de 275, on commencera par en prendre la moitié, pour 10 sols, & ensuite le quart pour 5 sols, ou la moitié du produit de 10 sols.

On dira donc (commençant toujours par la derniere colomne à gauche du multiplicande) la moitié de 2 est 1, qu'on posera dans la colomne du 2 du multiplicande, c'est-à-dire, dans cet exemple, dans celle des centaines. Ensuite la moitié de 7 est 3, qu'on posera aussi dans la même colomne qu'occupe le chiffre 7 dont on prend la moitié; il reste 1 unité qui vaut 10 étant portée dans la colomne suivante, & qui par con-

ſéquent fait 15 avec le chiffre 5 de cette colomne. On en prendra la moitié, qui eſt 7, pour 14: on poſera 7 à la colomne des unités. Il en reſte une qui eſt une livre dont il faut auſſi prendre la moitié, qui eſt 10 ſols, qu'il faut poſer vis-à-vis les ſols du multiplicateur, & dans le même rang que les livres du produit de 10 ſols, le tout ainſi que l'exemple figuré le fait voir: Ainſi on a dans cet exemple, pour le produit de 10 ſols, 137 livres 10 ſols.

Il reſte à prendre celui des 5 ſols. C'eſt évidemment le quart du multiplicande 275; ou la moitié de 137 liv. 10 ſols, & comme la moitié eſt plus aiſée à prendre que le quart, on prendra donc pour 5 ſols la moitié de 137 liv. 10 ſols, & pour cela on dira, la moitié de 1 n'eſt point, & on poſera un point ou zero ſous le chiffre 1. On portera cette unité ſur la colomne ſuivante où elle vaudra 10 unités, qui *jointes* au 3 de cette colomne, feront 13. On en prendra la moitié, qui eſt 6, qu'on poſera ſur le 3. Il reſte encore une unité, qui étant portée ſur la colomne voiſine, vaudra 10, qui avec les 7 de cette colomne, feront 17, dont la moitié 8 ſe poſera ſous le 7. Il reſte une unité, qui eſt ici

une livre, qui vaut 20 ſols, on les joindra avec les 10 ſols du précédent produit, & l'on aura 30 ſols, dont la moitié eſt 15 ſols, qu'on poſera ſous les 10 ſols du produit précédent de 10 ſols, & l'on aura ainſi 88 liv. 15 ſols pour le produit de 5 ſols, ou pour le quart du multiplicande 275.

On additionnera après cela tous les différens produits particuliers de cette opération, dont la ſomme donnera le produit total 7081 liv. 5 ſ.

Explication des différentes parties du Multiplicande qu'il faut prendre relativement au nombre des ſols du multiplicateur.

68. Quelque nombre de ſols qu'il y ait au multiplicateur (on ſuppoſe ce nombre moindre que 20; car autrement on augmenteroit les livres du multiplicateur d'autant d'unités qu'il y auroit de fois 20 ſols dans les ſols du multiplicateur; enſorte qu'il reſteroit au multiplicateur un nombre de ſols moindre que 20) on en trouvera les différens produits, obſervant de prendre ſur le multiplicande.

Pour 10 ſols, la moitié.

Pour 5 ſols, le quart ou la moitié du

produit de 10 ſols, lorſqu'il ſe trouvera dans l'opération.

Pour 4 ſols, la cinquiéme partie.

Pour 2 ſols, la dixiéme.

Pour 1 ſol, la vingtiéme ou la moitié de la dixiéme.

REMARQUE.

69. Les différens nombres ci-deſſus ſont appellés *Parties aliquotes* de la livre, parce qu'ils y ſont contenus exactement ou ſans reſte, & qu'on appelle *Partie aliquote* d'un nombre, un autre nombre qu'il contient ainſi pluſieurs fois exactement. Les autres nombres de ſols qu'on peut former au-deſſous de 20 ſols n'y ſeront pas contenus ſans reſte, on les appelle *Parties aliquantes*. *La Partie aliquante* d'un nombre eſt donc celle qui n'eſt pas contenue ſans reſte dans le nombre, comme 3, qui eſt aliquante de 5 & 7, &c. La méthode de prendre les Parties aliquantes de la livre, ne conſiſte qu'à les partager en Parties aliquotes, qu'on prend ſucceſſivement. Ainſi on prendra toujours ſur le multiplicande.

70. *Pour 3 ſols le produit de 2 ſols; & celui de 1 ſol.*

Pour 6 ſols ; le produit de quatre ſols & celui de 2 ſols ou pour 5 & pour 1 ſol.

Pour 7 ſols ; on prendra pour 5 ſols & pour 2 ſols.

Pour 8 ſols ; pour 4 ſols & pour 4 ſols ; ou pour 5 ſols, pour 2 ſols, & pour 1 ſol.

Pour 9 ſols ; pour 5 ſols & pour 4 ſols.

Pour 11 ſols ; pour 10 ſols & pour 1 ſol.

Pour 12 ſols ; pour 10 ſols & pour 2 ſols.

Pour 13 ſols ; pour 10 ſols, pour 2 ſols, & pour 1 ſol.

Pour 14 ſols ; paur 10 ſols & pour 4 ſols.

Pour 15 ſols ; pour 10 ſols & pour 5 ſols.

Pour 16 ſols ; pour 10 ſols, pour 5 ſols, & pour 1 ſol.

Pour 17 ſols ; on prendra pour 10 ſols, pour 5 ſols & pour 2 ſols.

Pour 18 ſols ; pour 10 ſols, pour 5 ſols, pour 2 ſols, & pour 1 ſol.

Enfin, pour 19 ſols, on prendra pour 10 ſols, pour 5, & pour 4 ſols.

71. Pour prendre telle partie qu'on voudra d'un nombre, comme ſa troiſiè-

me

me ou ſa quatriéme partie, &c. il ne faut que trouver combien de fois ce nombre contient de fois 3 ou 4; car la troiſiéme partie d'un nombre eſt un autre nombre, qui répeté ou additionné 3 fois à lui-même, fait le premier. De même la quatriéme partie du nombre eſt un autre nombre, qui, ajouté 4 fois à lui-même, fait le premier nombre, & ainſi de toutes les autres parties.

Ainſi la troiſiéme partie de 9 eſt 3; parce que 3 eſt contenu trois fois dans 9, & ſa quatriéme partie n'eſt que 2, parce que 9 ne contient 4 que 2 fois avec le reſte 1; dans ce cas, ſi 9 étoit accompagné d'autres chiffres, on porteroit 1 ſur celui qui le précéderoit à droite: il y vaudroit 10 unités, qui jointes à celle du chiffre de cette colomne, feroit une quantité dont on prendroit la quatriéme partie, ou le nombre de fois 4 qu'elle contiendroit; & s'il y avoit encore un reſte, on le porteroit de la même maniere ſur la colomne voiſine, & ainſi ſucceſſivement juſqu'au chiffre des unités, & alors s'il y a encore un reſte, on le multipliera par le nombre des parties dans leſquelles l'unité eſt diviſée, c'eſt-à-dire, par 20, s'il s'agit de livres, & on continuera de prendre ſur ce produit la même partie

qui aura été prise sur les chiffres précédens. Tout cela se trouvera éclairci par les exemples suivans.

72. Pour avoir la dixiéme partie du multiplicande ou le produit de 2 sols, on séparera par un point le chiffre de la colomne des unités des autres chiffres, on les avancera ensuite tous vers la droite d'une colomne ; ensorte que celui des dixaines se trouvera aux unités ; celui des centaines aux dixaines ; celui des milles aux centaines, & ainsi de suite, & l'on doublera le chiffre des unités séparé des autres, c'est-à-dire, qu'on le multipliera par 2, le produit sera toujours des sols qu'on portera à la colomne des sols.

Cette abbréviation est fondée sur ce qu'en avançant les chiffres d'une colomne vers la droite, ils valent alors chacun 10 fois moins. Or un nombre 10 fois plus petit qu'un autre en est la dixiéme partie. *Donc on a la dixiéme partie de tous les chiffres qui précédent celui des unités en les avançant ainsi d'une colomne vers la droite.* Il reste à prendre la dixiéme partie du chiffre des unités ; mais puisque la dixiéme partie d'une livre est 2 sols, cette dixiéme partie est donc deux fois autant de sols qu'il contient de livres. Donc il faut, pour

avoir la dixiéme partie du chiffre des unités, le doubler, & mettre son produit à la colomne des sols.

73. Lorsqu'on a la dixiéme partie du multiplicande, il est aisé d'en avoir la vingtiéme; car cette vingtiéme étant la moitié de la dixiéme, il faut, pour l'avoir, prendre la moitié de la dixiéme.

Ainsi pour le produit d'un sol, on prendra la moitié du produit de 2 sols, ou, ce qui est la même chose, on prendra la moitié des chiffres du multiplicande qu'on posera en l'avançant d'une colomnne vers la droite, & à l'égard du chiffre des unités, on le portera aux sols sans le doubler; car il est clair que puisque la vingtiéme partie d'une livre est 1 sol, la vingtiéme partie d'un nombre de livres exprimées par un chiffre, est autant de sols que ce nombre contient de livres. Tout ceci expliqué, passons aux exemples, pour le rendre plus lumineux par la pratique.

74. Soit 245 à multiplier par 15# 17 s.

On multipliera d'abord 245 par 15; ensuite, pour avoir le produit du multiplicande par les 17 s. du multiplicateur, on prendra pour 10 sols la moitié du multiplicande, commençant toujours

par le chiffre de la gauche.

	245	
	15#	— 17s.
	1225	
	245.	
Pour 10s.	122	— 10
Pour 5s.	61	— 5
Pour 2s.	24	— 10
Produit total	3883#	— 5s.

Ainſi on dira, la moitié de 2 eſt 1 ; qu'on poſera dans la troiſiéme colomne, parce que le 2 du multiplicande eſt dans cette colomne. On dira après, la moitié de 4 eſt 2, qu'on poſera dans la même colomne du 4 ; enſuite la moitié de 5 eſt 2 pour 4 : on poſera 2 dans la colomne des unités : celle qui reſte eſt une livre qui vaut 20 ſols ; on en prendra la moitié qui eſt 10 ſols, qu'on poſera dans la colomne des ſols du multiplicateur. On aura ainſi 122# 10s. pour le produit de 10 ſols.

On prendra enſuite pour 5 ſols, la moitié du précédent produit de 10 ſols. On dira donc, la moitié de 1 n'eſt point ; mais en portant cette unité ſur la colomne ſuivante, elle vaudra 12 avec le 2 de cette colomne, dont la moitié eſt 6,

qu'on posera sous le 2. On dira après, passant au chiffre 2 des unités, la moitié de 2 est 1, qu'on posera à la colomne des unités. Puis on prendra la moitié des 10 sols qui appartiennent au produit de 10 sols : c'est 5 sols qu'on posera à la colomne des sols, & l'on aura 61# 5s. pour le produit de 5 sols de cette multiplication. Il reste encore à prendre pour 2 sols.

Pour cela, on séparera le chiffre 5 des unités du multiplicande, des autres chiffres du même multiplicande par un point mis entre les dixaines & les unités. On posera ensuite les autres chiffres du multiplicande sous le produit de 5 sols, observant de les avancer chacun d'une colomne vers la droite ; ensorte que le chiffre 2 des centaines du multiplicande soit mis dans la colomne des dixaines ; que le 4, qui est aux dixaines, soit dans la colomne des unités ; & à l'égard du chiffre 5 des unités, on le doublera en disant, 2 fois 5 font 10, qu'on posera à la colomne des sols.

On additionnera après cela tous les produits particuliers de cette opération : leur somme 3883#, 5s. sera le produit total par 15#, 17s.

75. Si l'on a de même à multiplier

3109 par 425 livres 6 sols.

On fera la multiplication à l'ordinaire pour les 425 liv. du multiplicateur ; & lorsqu'on sera parvenu aux sols, on prendra pour 5 la quatriéme partie du multiplicande, & pour 1 sol sa vingtiéme.

	3109
par	425# — 6ſ.
	15545
	6218.
	12436..
Pour 5ſ.	...0777 — 5
Pour 1ſ.	....155 — 9
Produit total	1322257# — 14ſ.

Pour prendre le quart ou la quatriéme partie du multiplicande 3109, on prendra d'abord le quart du premier chiffre 3 de la gauche ; mais comme le quart de 3 n'est point, on posera zero dans la colomne du 3 du multiplicande, sous le produit des livres. Ces 3 unités de ce premier chiffre étant portées sur celui qui le suit immédiatement à droite, vaudront 30 unités, qui, avec le chiffre 1, feront 31, dont le quart est 7 pour 28. On posera donc 7 à la colomne du chiffre 1. Il reste 3 unités qui vaudront 30

ſur la colomne voiſine ; comme elle eſt remplie par un zero, il n'y a rien à leur ajouter. Ainſi on dira, le quart de 30 eſt encore 7 pour 28 ; on poſera 7 à la colomne des dixaines, & l'on aura 2 unités de reſte de cette colomne, qui vaudront 20 ſur la ſuivante, & qui, avec le chiffre 9 de cette colomne, feront 29, dont le quart eſt 7 pour 28. On poſera donc 7 à la colomne des unités, l'unité reſtante eſt une livre, dont le quart, qui eſt 5 ſols, ſera poſé à la colomne des ſols. Ainſi l'on aura pour le produit de 5 ſols, ou, ce qui eſt la même choſe, pour le quart du multiplicande, 777 liv. 5 ſols.

Il reſte à preſent à prendre le produit d'un ſol, qui doit donner la moitié de celui que donneroit 2 ſols.

On ſéparera d'abord par un point le chiffre 9 des unités du multiplicande, des autres chiffres qu'il contient, & l'on prendra la moitié des autres qu'on poſera ſous le produit de 5 ſols, mais obſervant d'avancer chaque chiffre d'une colomne vers la droite.

On dira donc, la moitié du chiffre 3 du multiplicande eſt 1 pour 2 : on poſera 1 à la colomne des centaines, qui eſt plus avancée d'une colomne vers la droi-

te que le chiffre 3. L'unité qui reſte de la moitié de 3, étant portée ſur la colomne voiſine, vaut 10, ce qui, joint avec le chiffre 1 de cette colomne, fait 11, dont la moitié eſt 5 pour 10. On poſera 5 à la colomne des dixaines, & l'unité reſtante ſera portée ſur la voiſine, où elle vaudra 10. Or, comme cette colomne eſt remplie par un zero, il n'y a rien à ajouter à ces 10, on en prendra donc la moitié, qui eſt 5, qu'on poſera à la colomne des unités. Il n'y a plus qu'à prendre la 20e partie du chiffre de unités 9, qui a d'abord été ſéparé des autres, & pour cela, il n'y a qu'à le poſer à la colomne des ſols, (*N.* 73.) Ainſi l'on aura pour le produit d'un ſol 155 liv. 9 ſols.

Il ne s'agit plus après cela que d'additionner tous ces différens produits pour avoir le produit total 1322257 livres 14 ſols.

REMARQUE.

76. Ayant ſéparé le chiffre des unités des autres chiffres du multiplicande par un point, on ſuppoſe que tous les chiffres ſont avancés d'une colomne à droite; enſorte que celui des dixaines répond après cela à la colomne des unités. Or ſi

ce

ce chiffre eſt impair, lorſqu'on en prend la moitié, il reſte une unité, qui ainſi eſt une livre, dont la moitié, qui eſt 10 ſols doit être jointe & portée aux ſols avec le chiffre des unités du multiplicande. C'eſt pourquoi, ſi dans l'exemple qu'on vient de voir, au lieu d'un zero aux dixaines du multiplicande, on avoit eu ou un 3, ou un autre chiffre impair, au lieu de la moitié de 10 qu'on a eu à poſer à la colomne des unités, on auroit eu la moitié de 13, qui eſt 6, il auroit donc reſté une livre, on en auroit pris la moitié, qui eſt 10 ſols, qu'on auroit jointe au chiffre 9 des unités, & l'on auroit eu 19 ſols aux ſols. Pour ſe rendre cette pratique bien évidente, il n'y a qu'à poſer à part le produit de 2 ſols, & en prendre la moitié. Cette moitié ſera abſolument le même produit que celui qu'on vient d'indiquer.

Multiplication par livres, ſols & deniers, ou par les entiers, & toutes les parties dans leſquelles on les diviſe ordinairement.

77. Lorſque le multiplicateur a des livres, des ſols & des deniers, on commence l'opération par les livres, après

quoi ou vient aux ſols, & des ſols on paſſe à la multiplication des deniers.

78. Le produit des deniers ſe prendra ſur celui d'un ſol ou de deux ſols.

79. On prendra ſur le produit d'un ſol,
Pour 6 deniers ſa moitié.
Pour 4 ℔. le tiers.
Pour 2 ℔. la ſixiéme partie.
Pour 1 ℔. la douziéme.
Pour 5 ℔. on prendra pour 4 le tiers, & pour 1 le quart du produit de 4.
Pour 7 ℔. on prendra pour 6 ℔. la moitié; & pour 1 la ſixiéme partie du produit de 6 ℔.
Pour 8 ℔. on prendra pour 6 la moitié; & pour 2 le tiers du produit de 6.
Pour 9 ℔. on prendra pour 6 ℔. la moitié, & pour les 3 reſtans, la moitié du produit de 6.
Pour 10 ℔. on prendra pour 6 la moitié du produit d'un ſol, & pour 4 le tiers du même produit.
Pour 11 ℔. on prendra d'abord pour 6 ℔. puis pour 3, la moitié du produit de 6, & pour les 2 reſtans, le tiers du produit des 6 ℔.

80. Si l'on prend les deniers ſur le produit de 2 ſols. On prendra *pour 6 ℔. le quart du produit de 2 ſols.*
Pour 8 ℔. le tiers.

Pour 3 ℔. la huitiéme partie.
Pour 4 ℔. la ſixiéme partie.
Pour 2 ℔. la douziéme.
Pour 1 ℔. la vingt-quatriéme, &c.

REMARQUES.

I.

81. Comme les Commençans ont ſouvent de la difficulté à prendre la douziéme & la vingt-quatriéme partie d'un nombre, ils pourront, lorſqu'ils auront à prendre un denier, ſuppoſer qu'ils ont 4 ou 6 deniers, & prendre enſuite le quart du produit de 4 deniers, ou la ſixiéme partie de celui de 6, qui donneront également le produit d'un denier.

II.

82. Lorſque le multiplicateur ſe trouvera avoir des deniers, ſans avoir des ſols, ou que le nombre de ſes ſols n'obligera point de prendre le produit d'un ſol, ni celui de 2 ſols, on ſuppoſera l'un de ces produits ſur lequel on prendra les deniers, mais on le biffera par un trait de plume, pour ne point le comprendre dans l'addition des différens produits de la multiplication.

Exemples de Multiplications par livres, ſols & deniers.

87. Soit 1300 à multiplier par 25$^{\#}$. 11^{s}. 5^{d}.

Après avoir fait la Multiplication par les livres & les ſols, qui ont donné le produit d'un ſol, on viendra aux deniers, que l'on prendra ſur le produit d'un ſol, qui, dans cet exemple, eſt de 65 liv.

1300
25$^{\#}$— 11^{s}— 5^{d}.

6500
2600.

Pour 10^{s}	..650	— 9	
Pour 1^{s}	...65	— 0	
Pour 4^{d}	21	— 13	— 4
Pour 1^{d}	05	— 8	— 4
Produit	33242$^{\#}$	— 1^{s}	— 8^{d}.

On prendra d'abord pour 4 deniers le tiers de ce produit. Pour cet effet, on dira le tiers de 6 eſt 2, qu'on poſera ſous le 6 & dans la même colomne. Enſuite le tiers de 5 eſt 1 pour 3, & il reſtera 2. On poſera 1 ſous le 5, & l'on portera les 2 unités reſtantes aux ſols. Elles vaudront 40 ſols: on en prendra le tiers,

qui eſt 13 pour 39 : on poſera donc 13 aux ſols. Il reſte un ſol, qui vaut 12 deniers ; le tiers en eſt 4, qu'on portera à la colomne des deniers, & l'on aura ainſi 21 liv. 13 ſols 4 den. pour le produit de quatre deniers.

Il reſte à prendre le produit d'un denier, c'eſt-à-dire, le quart de celui de 4. On dira donc, le quart de 2 n'eſt point, & l'on poſera zero ſous le 2. Mais ce chiffre porté à la colomne des unités vaut deux dixaines ou vingt unités, qui jointes avec le chiffre 1 de cette colomne, font 21, dont le quart eſt 5, qu'on poſera à la colomne des unités. Il reſte une livre qu'on portera aux ſols, & qui jointes avec les 13 ſols du précédent produit, fait 33 ſols : on en prendra le quart, qui eſt 8 pour 32, & on poſera 8 aux ſols. Il reſte 1 ſol, qui vaut 12 deniers, qu'on joindra avec les 4 du précédent produit ; ce qui donnera 16 deniers, dont le quart eſt 4, qu'on poſera ſous le 4 du produit de 4 deniers : on additionnera enſuite tous ces différens produits, dont la ſomme fera 33242 liv. 1 ſ. 8 d.

84. Pour multiplier 3045 par 303^{liv} 10^{ſ} 7^{d}, on commencera de même la multiplication par les livres & par les ſols ; mais comme les ſols ne donnent point

	3045	
	303# — 10ˢ — 7ᵈ.	
	9135	
	9135..	
Pour 10ˢ	..1522	— 10
Faux prod. d'un sol.	...152	— 8
Pour 6ᵈ.	...076	— 2 — 6
Pour 1ᵈ.	12	— 13 — 9
Produit.	924246#	— 6ˢ — 3ᵈ.

le produit d'un sol sur lequel on puisse prendre les deniers, on le supposera, c'est-à-dire, qu'on fera un faux produit d'un sol, qui donnera 152 liv. 5 sols; & ce sera sur ce produit que l'on prendra les deniers. Comme on a 7 deniers, on prendra d'abord pour 6 la moitié du produit d'un sol. Pour cet effet, on dira la moitié d'un n'est point, & l'on mettra zero sous cette unité. On la portera à la colomne suivante, où elle vaudra 15; avec le 5 de cette colomne. On dira, la moitié de 15 est 7, qu'on posera sous le 5. Il reste une unité pour la colomne suivante, qui vaudra 12 avec le chiffre 2 de cette colomne; on en posera la moitié, 6, sous le 2: on prendra aussi

la moitié des 5 sols du produit d'un sol, qui est 2 sols 6 deniers, on posera ainsi 2 sols aux sols, & 6 deniers à la colomne des deniers, & l'on aura 76 liv. 2 s. 6 d. pour le produit de 6 deniers.

Pour le denier restant des 7 du multiplicateur, on prendra la sixiéme partie du produit des 6 premiers. On dira donc, la sixiéme partie de 7 est 1 pour 6; on posera 1 sous le 7, & il restera une unité qu'on portera à la colomne suivante; elle y vaudra 16, jointe au 6 de cette colomne: on en prendra la sixiéme partie, qui est 2 pour 12, on posera 2 sous le 6, & il restera quatre livres, qui valent 80 sols, lesquels joints aux 2 sols du précédent produit font 82 sols, dont la sixiéme partie est 13 pour 78, on posera 13 aux sols. Il en restera 4, qui valent 48 deniers, lesquels joints aux 6 du précédent produit, font 54, dont la sixiéme partie est 9, & on posera 9 aux deniers. On aura ainsi 12 liv. 13 s. 9 d. pour le produit d'un denier. On passera après cela un trait de plume sur le produit d'un sol, & l'on additionnera ensemble tous les autres, qui donneront 924246 liv, 6 s. 3 d. pour le produit total de la Multiplication proposée.

De la Multiplication, lorſque le Multiplicateur a des toiſes, des piés & des pouces.

85. On multipliera tel nombre que l'on voudra par des toiſes, des piés, & des pouces, de la même maniere qu'on vient de le faire par livres, ſols, & deniers, obſervant, comme la toiſe a 6 piés, & le pié 12 pouces, de prendre pour 3 piés la moitié du multiplicateur; pour 2, le tiers, &c. & à l'égard des pouces, de les prendre ſur le produit d'un pié, comme on a pris les deniers ſur le produit d'un ſol. Un exemple ſuffira pour faire comprendre facilement tout ce que cette ſorte de multiplication peut avoir de particulier. On croit pouvoir ſe diſpenſer d'entrer dans le détail de l'opération, après tout ce qui a été expliqué ci-devant ſur ce ſujet.

On veut multiplier 4567
par 27toif. 5pies 10pouc.

	31969			
	91134.			
Pour 3 piés, la moitié du Multiplicande.	2283	— 3		
Pour 2 piés, le tiers du Multiplicande.	1522	— 2		
Pour 8 pouces, le tiers du produit de 2 piés.	507	— 2	— 8	
Pour 2 pouces, le quart du produit de 8 pouces.	126	— 5	— 2	
Produit total	127749toif.	0pies	10pouc.	

Preuve de la Multiplication composée.

86. On a déja donné le moyen de s'assurer de l'exactitude de l'opération de la multiplication (n. 56.) en faisant une autre multiplication dont le multiplicateur fût double de celui du premier, & qui, par conséquent, doit aussi donner un produit double : on employera cette même preuve à la multiplication composée. Elle peut généralement s'appliquer à toutes sortes de multiplications.

Pour en rendre la pratique encore plus aisée, on va en donner un exemple.

Soit le nombre 3025
à multiplier par 300#—10ſ—11d.

907500′

Produit de 10 ſols.	1512 —10
Faux produit d'un ſol.	151 — 9
Pour 6 deniers, la moitié du produit d'un ſol.	75 —12— 6
Pour 3 deniers, la moitié du produit de 6 ſols.	37 —16— 3
Pour 2, le tiers du produit de 6 deniers.	25 — 4— 2
TOTAL...	909151#—02ſ—11d.

Pour s'aſſurer de l'exactitude du produit 909151 liv. 2 ſ. 11 den. on fera une nouvelle multiplication avec le même multiplicande 3025, mais dont le multiplicateur ſera double du premier 300 liv. 10 ſ. 11 d. Pour cela, on poſera 2 fois ce même nombre, comme on le voit ci-à-côté, & l'on en fera l'addition : la ſomme 601 liv. 1 ſ. 10 d. ſera le multiplicateur de la ſeconde multiplication.

300#—10ſ—11d.
300 —10—11
601#— 1ſ—10d.

	3025		
Multiplicateur double du précédent.	601 ℔ —	1 ſ —	10 ℔.
	3025		
	18150..		
Produit d'un ſol.	....151 —	5	
Pour 6 den. la moitié.	.....75 —	12 —	6
Pour 4, le tiers du produit d'un ſol.	.....50 —	8 —	4
TOTAL...	1818302 ℔ —	5 ſ —	10 ℔.
Moitié du produit total, qui donne celui de la multiplication précédente, & par conſéquent la preuve de cette opération.	909151 ℔ —	2 ſ —	11 ℔.

Application de la Multiplication compoſée à des Exemples.

I.

87. *Un Particulier s'eſt engagé de fournir* 1200 *chevaux pour l'Artillerie, à raiſon de* 35 *ſols* 6 *den. par jour, pour chaque cheval; ſes chevaux ont été employés pendant les mois d'Avril, Mai, Juin, Juillet, Août, Septembre, & juſqu'au* 15 *Octobre, combien lui eſt-il dû?*

Il eſt évident qu'il faut ſçavoir à quoi ſe monte par jour la dépenſe ou la paye des 1200 chevaux, & qu'enſuite il

la faut multiplier par le nombre de jours que les chevaux ont été employés.

	1200 Chevaux.
à	1 ᵗᵗ – 15 ˢ – 6 ᵈ.
	1200
Pour 10 ſols	600
Pour 5 ſols	300
Faux produit d'un ſol.	ϕ ϕ ϕ
Pour 6 deniers	30
Dépenſ. par J. des Ch.	2130 ᵗᵗ

Il ont été employés 6 mois & demi, qui contiennent, ſçavoir,

Avril	30 jours.
Mai	31
Juin	30
Juillet	31
Août	31
Septembre	30
Et pour Octobre	15
TOTAL	198 jours.

Il ne s'agit plus à preſent que de multiplier ces 198 jours par la dépenſe d'un jour, c'eſt-à-dire, par 2130 liv. pour avoir la dépenſe demandée.

	198 jours
à	2130 ℔
	5940
	198..
	396...
Dépense totale...	421740 ℔

II.

88. *Lorsque le Boisseau d'avoine se vend 7 sols 8 deniers, on demande à combien revient le muid, qui en contient 288.*

Il est clair qu'il ne faut que multiplier 288 boisseaux par 7 sols 8 deniers.

	288 *Boisseaux.*
à	0 ℔ — 7 ſ — 8 ℔.
Pour 5 ſ	72
Pour 2 ſ	28 — 16
Pour 8 ℔.	09 — 12
Réponse	110 ℔ — 8 ſ —

III.

89. *Un Officier a une Ordonnance de* 800 *liv. à recevoir, sur laquelle on doit retenir le dixiéme & les* 4 *deniers pour*

livre ; ſçavoir, à quoi ſe montent ces deux retenues, & le produit net de l'Ordonnance.

Il faut d'abord prendre le dixiéme de 800 liv. pour cela, il ne faut que retrancher le premier zero de la droite, & il reſtera 80, qui ſera la dixiéme partie de 800, ou le produit de ce nombre par 2 ſols. A l'égard des 4 deniers, comme ils ſont la ſixiéme partie du produit de 2 ſols, ils doivent produire la ſixiéme partie de 80, qui eſt 13 liv. 6 ſ. 8 deniers.

Ainſi l'on aura pour le dixiéme de 800,	80#
Pour le produit des 4 deniers pour livre.	13#—6ſ—8d.
Tot. des deux retenues	93#—6ſ—8d.

Preſentement ſi de 800 livres on en ſouſtrait 93 liv. 6 ſ. 8 den. le reſte 706 liv. 13 ſ. 4 d. ſera le produit net de l'Ordonnance de 800 liv.

Qui de	800#
ôte	93#— 6ſ— 8d.
reſte	706#— 13ſ— 4d.
Preuve	800#

IV.

90. *Trouver la dépenſe totale ou le fonds néceſſaire pour l'entretien d'un Régiment de Cavalerie, de Dragons ou d'Infanterie pendant une année.*

Il faut pour cela ſçavoir le nombre des ſoldats dont chaque Compagnie eſt compoſée; celui des différens Officiers qui y ſont attachés, & la paye qui leur eſt accordée à chacun par le Roi; ce qui étant connu, on peut trouver aiſément la dépenſe de toute la Compagnie dans un jour, & celle de la Compagnie dans un an, en multipliant la dépenſe d'un jour par 365 jours. Ayant ainſi la dépenſe d'une Compagnie pendant une année, on aura celle de toutes les Compagnies du Régiment, en multipliant la dépenſe d'une Compangie par le nombre des autres; ce qui n'a aucune difficulté.

91. *Il eſt clair* qu'on peut par-là avoir la dépenſe totale de toute une armée pendant une année, ou pendant tel nombre de jours que l'on veut; car lorſqu'on connoîtra la dépenſe particuliere de tous les différens corps dont elle eſt compoſée, l'addition de ces dépenſes donnera celle de toute l'armée; ce qui

paroît trop clair & trop facile pour mériter d'entrer là-dessus dans un plus grand détail.

V.

DE LA DIVISION.

92. DIVISER un nombre par un autre, c'est en chercher un troisiéme qui y soit contenu autant de fois que l'unité est contenu dans le second.

Ainsi, diviser 12 par 4, c'est chercher le nombre 3 qui est contenu 4 fois dans 12, c'est-à-dire, autant de fois que le second 4 contient l'unité.

Le nombre 3 étant contenu 4 fois dans 12, en est le quart; s'il y étoit contenu 5 fois, il en seroit la cinquiéme partie, &c. D'où il suit que diviser un nombre par un autre, c'est aussi le partager en autant de parties égales que le second nombre contient d'unités.

93. Le nombre à diviser se nomme *Dividende*; celui par lequel on divise, *Diviseur*, & celui qui fait connoître combien de fois le Dividende contient le

le Diviſeur, ſe nomme *le Quotient.*

Dans l'exemple de 12 à diviſer par 4, 12 eſt le Dividende, 4 le Diviſeur, & 3 le Quotient.

On ſuppoſe qu'on ſçait diviſer par cœur tout nombre moindre que 100 par tout nombre moindre que 10; & pour faire entendre plus clairement les regles de la Diviſion, on les fera précéder d'un exemple d'où on pourra les déduire.

EXEMPLE d'une Diviſion dans laquelle le Diviſeur n'a qu'un chiffre.

94. Soit le nombre de 772 à diviſer par 4.

Dividende	772	}	*Quotient.*
Diviſeur	4 |	}	193
	37 |		
	4 |		
	12		
	0		

On tracera à côté de ce nombre, vers ſa droite, une petite ligne, comme on le voit ci-deſſus; on poſera à la droite de

cette ligne, les chiffres qu'on trouvera pour le quotient.

On écrira le Diviſeur 4 ſous le premier chiffre 7 de la gauche du Dividende, & l'on marquera un point ſur ce chiffre.

Ceci fait, on commencera l'opération de la Diviſion, en diſant, en 7, combien de fois 4, on trouvera qu'il y eſt 1 fois. On poſera 1 au Quotient; on multipliera le diviſeur 4 par ce chiffre, & l'on en retranchera le produit 4, du nombre 7, il reſtera 3, qu'on poſera dans la même colonne du chiffre 7 ſous le diviſeur 4.

On marquera enſuite un point ſur le ſecond chiffre du dividende, en comptant de gauche à droite, & on abbaiſſera ce chiffre à côté du reſte 3. On avancera le diviſeur d'une colonne vers la droite, c'eſt-à-dire, qu'on le poſera ſous le chiffre 7 qu'on vient d'abbaiſſer, & l'on dira, joignant le reſte 3 avec ce chiffre, en 37 combien de fois 4: on trouvera 9 qu'on poſera au quotient, à côté du premier chiffre. On multipliera 9 par 4, en diſant: 9 multiplié par 4 fait 36, qui étant ôté de 37, il reſte 1, qu'on poſera ſous la ſeconde poſition du diviſeur 4.

On marquera un point sur le troisiéme chiffre 2 du dividende, & on l'abbaissera ensuite à côté du second reste 1. On reposera le diviseur 4, en l'avançant d'une colonne vers la droite; de maniere qu'il soit sous le chiffre 2 qu'on vient d'abbaisser, & l'on dira, joignant le reste 1 avec le chiffre 2, en 12 combien de fois 4; il y est 3, qu'on posera au quotient. On multipliera 3 par 4, ce qui donne 12, qui étant retranché du reste 12 du dividende, il ne reste rien.

Comme il n'y a plus de chiffres à abbaisser dans le dividende, la division est achevée, & le quotient 193 fait voir que dans 772 il y a 193 fois 4.

Preuve de la Division.

La preuve de la division se fait en multipliant le quotient par le diviseur, & lorsque le produit se trouve égal au dividende, l'opération est exacte.

Car puisque le quotient exprime le nombre de fois que le dividende contient le diviseur, ce nombre de fois multiplié par le diviseur, doit donner le dividende.

Quotient	193
Diviseur	4
Preuve	772

95. Si après la derniere opération d'une diviſion il y a un reſte, on l'ajoutera, pour la preuve, au produit du quotient par le diviſeur.

Par exemple, ſi on diviſe 4378 par 5, on trouvera le quotient 875, avec le reſte 3; & pour la preuve, on multipliera 875 par 5, & on ajoutera 3 au produit 4375, à la colonne des unités, avec lequel on l'additionnera.

4378 { 875

5 |

37

5

28

5

reſte 3

Preuve	875
	5
	4375
reſte	3
Produit	4378 *égal au Dividende.*

On donnera dans la ſuite la maniere d'exprimer au quotient le reſte d'une diviſion.

REMARQUES.

I.

96. Les points que l'on met ſur les chiffres du dividende, ſervent à faire connoître ceux qui ont déja été diviſés, & ce qui reſte à diviſer du dividende.

II.

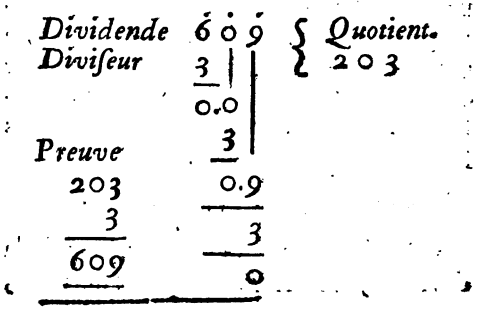
97. Le diviſeur change de place à chaque opération, en avançant toujours d'une colonne vers la droite. Sa premiere poſition eſt ſous la premiere colonne du dividende, à moins que le chiffre du dividende qui occupe cette colonne, ne ſoit de moindre valeur que celui du diviſeur ; car autrement on prend pour la premiere colonne du dividende le ſecond chiffre, en allant de gauche à droite, & alors le premier chiffre du diviſeur ſe place ſous cette colonne, ainſi qu'on a pû l'obſerver dans la précédente opération.

III.

98. Si dans une des opérations de la diviſion, il ne ſe trouve point de reſte,

ou si le reste joint au chiffre suivant abaissé, est de moindre valeur que le diviseur, on pose zero au quotient ; on abaisse ensuite un autre chiffre du dividende, & on pose le diviseur en l'avançant à l'ordinaire d'une colonne vers la droite.

Par exemple, si l'on a 609 à diviser par 3, on trouvera d'abord que 6 contient 2 fois 3. On posera donc 2 au quotient, & retranchant ensuite de 6 le produit de 2 par 3, qui est aussi 6, il ne restera rien. Abaissant après cela le second chiffre du dividende, qui est zero, on posera dessous le diviseur 3. Mais comme zero ne contient aucun nombre, on posera zero au quotient pour cette opération, & l'on abaissera le troisiéme chiffre 9 du dividende, sous lequel on posera le diviseur, & l'on achevera la division comme dans l'exemple précédent.



IV.

99. Lorſqu'on diviſe un nombre par un autre, comme par exemple, 609 par 3, & qu'on dit d'abord en 6 combien de fois 3, il faut obſerver que le 6 dans la colonne où il ſe trouve placé, vaut 600, & qu'ainſi ſa diviſion par 3 donnant 2 au quotient, ce nombre doit être à la colonne des centaines, puiſque 600 contient trois 200 fois. Donc, en poſant 2 au quotient, on ſous-entend que ce nombre eſt précédé de deux zero vers la droite. Si on ne les poſe point d'abord au quotient, c'eſt qu'on veut voir ſi les autres colonnes du dividende ne contiendront pas le diviſeur. Si elles le contiennent, on poſe le chiffre qui en exprime la quantité, aux colonnes du quotient qui lui conviennent; ſinon, on marque ces colonnes par des zero, comme on l'a vû dans l'exemple précédent.

V.

100. La démonſtration de la diviſion ſe tire de l'opération même; car il eſt clair qu'en trouvant combien toutes les parties du dividende contiennent le diviſeur, on ſçait combien de fois le dividende contient le diviſeur.

De la Diviſion, lorſque le Diviſeur a pluſieurs chiffres.

101. Pour diviſer un nombre donné quelconque par un diviſeur qui a pluſieurs chiffres,

1°. On poſera le diviſeur ſous le dividende de maniere que le premier chiffre à gauche du diviſeur, ſoit ſous le premier de la gauche du dividende, & tous les autres chiffres dont il eſt compoſé, ainſi, ſucceſſivement ſous les chiffres du dividende, en allant de gauche à droite. Si le premier chiffre du diviſeur eſt plus grand que le premier du dividende, on le poſera ſous le ſecond chiffre ſuivant; alors la ſeconde colonne du dividende ſera regardée comme la premiere, & elle comprendra la valeur des 2 premiers chiffres du dividende.

2°. On mettra un point ſur chacun des chiffres du dividende qui répondent à ceux du diviſeur, & l'on cherchera combien de fois le diviſeur y ſera contenu; le nombre qui l'exprimera, ſera mis au quotient, & il en ſera le premier chiffre.

3°. On multipliera le diviſeur par le chiffre pour le quotient, & l'on en retranchera le produit des chiffres du dividende, ſous leſquels on a poſé le diviſeur.

viſeur. On écrira le reſte, s'il y en a un, ſous ces chiffres, comme dans la ſouſtraction.

4°. On mettra enſuite un point ſur le chiffre du dividende, qui ſuit immédiatement ceux ſous leſquels le diviſeur a été poſé d'abord; on abaiſſera ce chiffre dans ſa même colonne, à côté du reſte de la premiere ſouſtraction; on poſera le diviſeur ſous ce reſte, en l'avançant d'une colomne vers la droite; enſorte que le dernier chiffre du diviſeur à droite ſe trouve toujours ſous le dernier chiffre abaiſſé pour continuer l'opération. On cherchera enſuite, comme dans la premiere opération, combien le reſte de cette opération, joint avec le chiffre abaiſſé, contient de fois le diviſeur. Ce nombre étant trouvé, on le poſera au quotient; enſuite on retranchera ſon produit par le diviſeur, du reſte de la premiere ſouſtraction & du chiffre abaiſſé, & on poſera le reſte comme dans la premiere opération. On abaiſſera à côté de ce reſte, le chiffre ſuivant du dividende, l'on poſera deſſous le diviſeur, & l'on cherchera combien de fois il y ſera contenu; le tout ainſi que dans la premiere opération, qu'on réitérera ſucceſſivement juſqu'à ce que l'on ait abaiſ-

ſé tous les chiffres du dividende.

5°. Il doit toujours y avoir autant de chiffres au quotient, qu'il y a de différentes poſitions du diviſeur dans l'opération ; c'eſt pourquoi lorſque le reſte d'une opération, joint avec le chiffre abaiſſé, ſe trouve plus petit que le diviſeur, on met zero au quotient, comme on l'a déja obſervé ci-devant, dans la diviſion par un ſeul chiffre.

6°. Les chiffres du dividende, ſous leſquels le diviſeur ſe trouvera poſé dans chaque opération, ne contiendront jamais le diviſeur 10 fois, mais ſeulement 9 au plus. Car les chiffres du dividende qui répondent au diviſeur, ſont en même nombre que ceux du diviſeur, ſi le premier de la droite eſt plus grand que le premier du diviſeur, autrement il y a un chiffre de plus dans les chiffres du dividende, que dans le diviſeur. Or, ſi le diviſeur a le même nombre de chiffres que la partie du dividende ſous laquelle il eſt placé, & qu'on le multiplie par 10, ſon produit aura un chiffre de plus que cette partie du dividende, & par conſéquent il ne pourra pas en être retranché. Si le diviſeur a un chiffre de moins que la partie du dividende ſous laquelle il eſt placé, ſon premier chiffre

eſt plus grand que le premier de cette partie du dividende ; en le multipliant par 10, il aura le même nombre, mais il fera alors un nombre plus grand que la partie du dividende ſous laquelle il eſt placé. Donc, dans aucun cas cette partie du dividende ne pourra contenir 10 fois le diviſeur.

7°. Pour chercher combien de fois les chiffres du dividende, correſpondant à ceux du diviſeur, contiendront le diviſeur, on ſe ſervira d'une eſpece de tatonnement de cette maniere.

Pour ſçavoir par exemple, combien 684 contient de fois 237, j'obſerve que le premier chiffre 6 du dividende contient trois fois le premier 2 du diviſeur. Je ſuppoſerai en conſéquence que 684 contient 3 fois 237, & pour m'en aſſurer, je multiplierai à part 237 par 3. Le produit donnera 711, plus grand que 684, ce qui me fait voir que ce nombre ne contient pas 3 fois 237. J'eſſaye après cela s'il le contient 2 fois, & pour cet effet, je multiplie 237 par 2. J'ai le produit 474 plus petit que 684, ce qui me fait connoître que 684 ne contient le diviſeur 237 que 2 fois, avec un reſte, qui ſera plus petit que 237 ; car s'il y étoit égal, 684 con-

tiendroit 3 fois 237, au lieu qu'on a vû qu'il ne le contient que 2.

On déterminera de la même maniere nombre de fois que chaque partie du dividende de toute diviſion, contiendra le diviſeur, qui ſera placé ſous cette partie, & on obſervera, comme on vient déja de le faire, que le reſte de chaque opération doit être toujours moindre que le diviſeur. S'il étoit égal ou plus grand, le chiffre poſé au quotient ſeroit trop petit.

Les regles qu'on vient d'expliquer, contiennent aſſez exactement toute la pratique de la diviſion. Il ne s'agit plus que de les appliquer à des exemples, pour aider les Commençans à ſe les rendre plus familieres.

102. Soit le nombre 118168 à diviſer par 29.

On poſera vers la gauche le diviſeur 29, ſçavoir ſous le ſecond & le troiſiéme chiffre du dividende, parce que le premier chiffre du diviſeur eſt plus grand que le premier du dividende. On mettra des points ſur ces trois premiers chiffres, & on cherchera après, comme on l'a enſeigné cy-devant, combien 118 contient de fois 29, on trouvera 4 fois. On poſera 4 au quotient, & encore ſous le

chiffre 9 du diviſeur, pour multiplier 29 par 4, ce qui donnera le produit 116, qu'on ſouſtraira de 118, & il reſtera deux.

Dividende	1 1 8 1 6 8	*Quotiem.*
Diviſeur	2 9	4074.
	4	
	1 1 6	
1er. *Reſte*	0 0 2. 1 6	
	2 9	
	7	
	2 0 3	
2e. *Reſte*	0 1 3. 8	
	2 9	
	4	
	1 1 6	
3e. *& dern. Reſte*	0 2 2	

On abaiſſera le quatriéme chiffre 1 du dividende à côté du reſte 2, & dans ſa même colonne, avec lequel reſte il fera 21; & comme ce nombre eſt plus petit que le diviſeur 29, on poſera zero au quotient, & l'on abaiſſera à côté de 21 le cinquiéme chiffre 6 du dividende, qui fera, avec les deux chiffres 1 & 2

qui le précédent, 216. On fera marcher le diviseur de deux colonnes, c'est-à-dire, qu'on le posera sous les chiffres 1 & 6 de 216, & l'on cherchera ensuite en 216 combien il y a de fois 29. On trouvera 7, qu'on posera au quotient, & encore sous le chiffre 9 du diviseur, pour servir de multiplicateur à ce diviseur, lequel donnera ainsi le produit 203, qu'on retranchera de 216, & il restera 13 pour le second reste.

On abaissera à côté du reste 13 le dernier chiffre 8 du dividende, qui fera, avec ce reste, 138. On posera 29 sous 38, & l'on cherchera combien de fois 29 est contenu dans 138. On trouvera 4, qu'on posera au quotient, & encore sous le 9 du diviseur par 4; ce qui donnera le produit 116, qu'on soustraira de 138, & il restera 22 pour le troisiéme & dernier reste.

S'il y avoit un plus grand nombre de chiffres au dividende, l'opération se continueroit de la même maniere; elle se feroit aussi également quand le diviseur auroit un plus grand nombre de chiffres que dans cet exemple.

On fera la preuve de cette opération en multipliant le quotient 4074 par le diviseur 29, & l'on ajoutera le dernier reste 22 au produit.

4074
29
36666
8148.
Dernier reſte 22
Preuve 118168

103. Soit de même à diviſer 947038 par 37.

947038 {25595}
37
2
74
1er. reſte 207
37
5
185
2e. reſte 0220
37
5
185
3e. reſte 0353
37
9
333 *dernier reſte*
4e. reſte 208 *Preuve*
37
5
185
5e. & dr. reſte 023

25595
37
179165
76785.
23
947038

On cherchera d'abord combien les deux premiers chiffres de la gauche du dividende, contiennent de fois 37. On trouvera 2 fois. On posera 2 au quotient, & encore sous le second chiffre du diviseur ; on multipliera 37 par 2, ce qui donnera le produit 74, qu'on soustraira de 94, & l'on aura 20 pour le reste de la premiere soustraction.

On abaissera ensuite le troisiéme chiffre 7 du dividende à côté du premier reste, avec lequel il fera 207, & l'on posera le diviseur sous ce nombre, en l'avançant d'une colomne vers la droite, c'est-à-dire, sous le zero & sous le 7 : on cherchera ensuite combien 207 contient de fois 37 : on trouvera 5, qu'on posera au quotient, & encore sous le 7 du diviseur, pour lui servir de multiplicateur : on aura après la multiplication, le produit 185, qu'on soustraira de 207, & l'on aura le second reste 22.

On abaissera à côté du second reste 22, le quatriéme chiffre zero du dividende, qui fera valoir ce reste 220 : on posera le diviseur 37 sous les 2 derniers chiffres de ce nombre, & l'on cherchera combien de fois il y sera contenu. On trouvera 5, qu'on posera au quotient & sous le 7 du diviseur. On multi-

pliera le diviſeur par 5, & l'on retranchera le produit 185 de 220; ce qui donnera le troiſiéme reſte 35. L'on achevera enſuite l'opération, comme on l'a fait dans l'exemple précédent, & comme l'exemple figuré le fait voir. On aura, l'opération étant achevée, 25595 pour le quotient de 947038 diviſé par 37, c'eſt le nombre de fois que 37 eſt contenu dans ce nombre.

Autres Exemples de Diviſions.

Divid.	100000	{2223	
Diviſ.	450		
	2		
	900		
1er. *reſte*	100.0		
	450		
	2		222
	900		450
			11100
2e. *reſte*	100.0		888.
	450	*dernier reſte*	100
	2	*Preuve*	100000
	900		
3e. & dr. *reſte*	100		

Divid.	5 7 8 1 0 1 0	{ 2 0 0 0 3 }	
Divis.	2 8 9		
	2		
	5 7 8		2 0 0 0 3
			2 8 9
1er. reste	0 0 0. 1. 0. 1. 0		1 8 0 0 2 7
	2 8 9		1 6 0 0 2 4 .
	3		4 0 0 6 . .
	8 6 7	*dernier reste*	1 4 3
dern. reste	1 4 3	*Preuve*	5 7 8 1 0 1 0

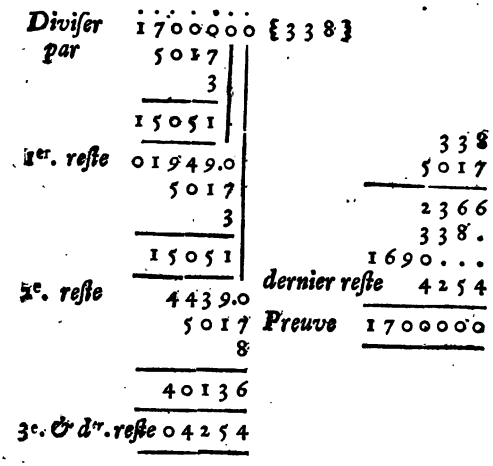
Divid.	7 2 0 0 0 0 0	{ 6 0 0 0 }	
Divis.	1 2 0 0		6 0 0 0
	6		2 0 0 0
	7 2 0 0		1 2 0 0 0 0 0
Der. reste égal zero.	0 0 0 0		6 0 0 0 . . .
		Preuve	7 2 0 0 0 0 0

REMARQUE.

104. Dans ce dernier exemple, les quatre premiers chiffres du dividende contiennent exactement ou sans reste, le diviseur ; en sorte qu'après la premiere opération, il ne reste rien. Or, il doit y avoir autant de chiffres au quotient, qu'il y a ou qu'il peut y avoir de différentes positions au diviseur, ou, ce qui

eſt la même choſe, qu'il y a de chiffres à abaiſſer. Mais, après la premiere opération de cet exemple, il reſte 3 zero ou 3 chiffres à abbaiſſer, & par conſéquent 3 chiffres à mettre encore au quotient, leſquels chiffres ne peuvent être que des zeros, puiſqu'il ne reſte rien ni dans la premiere opération de la diviſion, ni dans les caracteres qui reſtent à abbaiſſer.

105. Il ſuit de cette obſervation, que lorſqu'en diviſant un nombre par un autre, il ſe trouve une opération dans laquelle il n'y a point de reſte, alors s'il n'y a plus que des zeros dans le dividende, il faut, pour achever la diviſion, mettre autant de zeros au quotient qu'il en reſte à abaiſſer. C'eſt ce qu'on a pratiqué dans l'exemple qui donne lieu à cette remarque.



METHODE PLUS ABREGE'E

DE LA DIVISION.

106. LORSQUE les regles de la diviſion ſeront devenues un peu familieres par l'uſage, on pourra en abreger l'opération, en faiſant en même temps la multiplication de chaque chiffre des quotients par le diviſeur & la ſouſtraction de ce produit du dividende. Un exemple ſuffira pour faire connoître cet-

te méthode. On ne l'a pas donnée d'abord, parce qu'elle n'eſt que l'Abregé de celle qu'on a expliquée, & qu'il a paru que les principes de la Diviſion ſeroient plus facilement entendus, la regle étant expliquée dans tout le détail qu'elle exige, que ſi on l'avoit donnée ſeulement par abregé.

Les diviſions que l'on fera dans la ſuite de cet Ouvrage, ſeront faites ſelon cette Méthode. Elle n'aura abſolument rien de difficile, ſi l'on a bien conçû tout ce que l'on a expliqué juſqu'ici ſur la Diviſion.

Soit le nombre 57060 à diviſer par 25.

	57060	{2282}		
	25			
1er. reſte	070			2282
	25			25
2e. reſte	206			11410
	25			4564
3e. reſte	060	reſte		10
	25	Preuve		57060
4e. & dr. reſte	10			

On poſera à l'ordinaire le diviſeur 25 ſous les 2 premiers chiffres de la gau-

che du dividende, & l'on cherchera combien de fois il y ſera contenu. Ayant trouvé 2 fois, on mettra 2 au quotient, mais au lieu de mettre encore ce chiffre ſous le premier de la droite du diviſeur, pour multiplier ce diviſeur, on dira : 2 fois 5 font 10, qui ne pouvant être à côté de 7, qui eſt au-deſſus du 5, on prendra une unité ſur le chiffre du dividende qui précéde le 7 à gauche, laquelle poſée ſur ce 7, vaudra 10 de ſes unités, qui jointes avec les ſiennes, font 17, & alors qui de 17 ôte 10, il reſte 7, qu'on poſera ſous le 5 du diviſeur. Le premier chiffre 5 du dividende ne vaut plus alors que 4 unités; mais on peut le regarder comme valant 5, pourvû qu'on augmente d'une unité le produit du chiffre 2 du quotient par le premier chiffre du diviſeur; car augmentant ces deux nombres également, leur différence ſera toujours la même. En effet, le produit du 2 du quotient, par le 2 du diviſeur, eſt 4, qui ôté du 5 du dividende, diminué d'une unité, il ne reſte rien, ou bien ce produit étant augmenté de l'unité qu'on a priſe ſur le 5 du dividende, fait 5, lequel étant retranché de ce chiffre, conſideré auſſi comme valant 5, donne également zero. Donc,

on pourra toujours dans la ſuite emprunter ſur les chiffres du dividende qui précéderont celui ſous lequel ſera placé le chiffre du diviſeur qu'on multipliera, tel nombre d'unités qu'on aura beſoin, & conſidérer ces chiffres comme conſervant toujours leur même valeur, pourvû qu'on obſerve d'ajouter aux produits des chiffres du diviſeur, auſquels ils correſpondront, le même nombre d'unités qu'on aura empruntées ſur ces chiffres. Ceci expliqué, il faut continuer l'opération déja commencée.

Ayant trouvé le premier reſte 7, on abaiſſera à côté le troiſiéme chiffre zero du dividende, qui avec le reſte 7 fera 70, ſous lequel nombre on poſera le diviſeur 25 : on cherchera enſuite en 70 combien il y a de fois 25: on trouvera 2 qu'on poſera au quotient. On multipliera par ce nombre le diviſeur 25, en diſant : 2 fois 5 font 10, qui ne peuvent être ôtés du zero du dividende, qui eſt au-deſſus de 5, mais prenant une unité ſur le 7 qui le précéde, elle vaudra 10 ſur ce zero, & alors on dira, qui de 10 ôte 10, il reſte zero, qu'on poſera ſous le 5 du diviſeur, & l'on retiendra 1, c'eſt-à-dire, l'unité empruntée. On dira enſuite, 2 fois 2 font 4, & 1 de retenue font

5, qui ôté de 7, il reſte 2, qu'on poſera dans la colonne du chiffre 7 du dividende, & l'on aura le ſecond reſte 20.

On abaiſſera à côté du ſecond reſte 20, le chiffre 6 du dividende, avec lequel il vaudra 206. On poſera le diviſeur 25 ſous les deux derniers chiffres de ce nombre, & l'on cherchera combien de fois il y ſera contenu. On trouvera 8, qu'on poſera au quotient : on multipliera 25 par 8, en diſant, 8 fois 5 font 40, qui ne peuvent être retranchés du dividende ; c'eſt pourquoi on empruntera une unité ſur le chiffre 2 du dividende, laquelle poſée à côté en vaudra 10 : on prendra 4 de ces 10 unités, qui en vaudront 40 à la colonne du 6, leſquelles jointes avec ce 6, feront 46, & alors on dira, qui de 46 ôte 40, il reſte 6, que l'on poſera ſous le 5 du diviſeur, & l'on retiendra les 4 unités empruntées. On dira après cela, 8 fois 2 font 16, & 4 de retenus ſont 20, qui étant ôté de 20, c'eſt-à-dire, des deux chiffres qui répondent au 2 du diviſeur, il reſtera zero, & l'on aura 6 pour le troiſiéme reſte de l'opération.

On abaiſſera à côté de ce reſte le dernier chiffre zero du dividende avec lequel il vaudra 60, on poſera 25 ſous

60,

60, & on cherchera combien de fois il y ſera contenu. Ayant trouvé 2, on le poſera au quotient, & on multipliera le diviſeur par ce même nombre, en diſant, 2 fois 5 ſont 10, qu'on ne peut ôter du zero qui eſt au-deſſus du 5, c'eſt pourquoi on prendra une unité ſur le chiffre 6 qui eſt à côté, laquelle en vaudra 10 à la colonne du zero, & on dira alors, qui de 10 ôte 10, il reſte zero, qu'on poſera ſous le 5 à la derniere colonne du dividende, & l'on retiendra 1, c'eſt-à-dire, l'unité empruntée. On dira enſuite, 2 fois 2 ſont 4, & un de retenu ſont 5; qui ôté de 6, il reſte 1, qu'on poſera ſous le 2 diviſeur, & l'on aura 10 pour le quatriéme & dernier reſte de cette diviſion, dont le quotient eſt 2282.

REMARQUE.

107. On peut encore abréger cette opération en ſe diſpenſant d'écrire le diviſeur ſous toutes les parties du dividende. Pour cet effet, il faut tirer une ligne droite au-deſſus du quotient, & écrire le diviſeur ſous cette ligne. Il faut après cela, à chaque opération qu'on fait ſur le dividende, imaginer le diviſeur poſé comme dans le précédent exemple, & retrancher ſon produit par le chiffre du

quotient des chiffres du dividende ſous leſquels on le ſuppoſe placé, le tout ainſi qu'on le voit dans l'exemple cy-deſſous, qui eſt le même que le précédent.

Divid.	57060		*Diviſeur.*
			25
1er. *reſte*	070		
2e. *reſte*	206		*Quotient*
3e. *reſte*	060		2282
4e. *& dern. reſte*	10		

Maniere d'exprimer au quotient le reſte d'une diviſion.

108. Soit 37897 liv. qu'il faut partager également à 359 perſonnes, ou, ce qui eſt la même choſe, qu'il faut diviſer par 359.

Faiſant cette diviſion, comme on l'a enſeigué dans les exemples précédens, on trouvera le quotient 105 liv. avec le reſte 202, qui ne peut être diviſé par 359.

Dividende 37897 { 105 ℔
Diviſeur 359 | |

Premier reſte 01997
359

Dernier reſte 202 ℔
qu'il faut multiplier par 20 ſ.

4040 ſ. { 11 ſ.
359

450
359

Reſte des ſols 91 ſ.
qu'il faut multiplier par 12 *deniers.*

18
91.

1092 ₰. { 3 ₰.
359

Reſte des deniers 15 ₰.

105 ℔ — 11 ſ. — 3 ₰.
359

945
525.
315..
179 — 10
17 — 19
4 — 9 — 9
reſte 0 — 1 — 3

Preuve 37897 ℔ — 00 — 0

Comme il s'agit de livres dans cet exemple, le reſte 202 exprime des livres; il faut le changer en ſols; & pour cet effet il faut le multiplier par 20; alors on aura 4040 ſols, qu'on diviſera par le même diviſeur 359. On aura 11 ſols au quotient avec 91 ſols de reſte.

On multipliera le reſte 91 par 12, pour changer les ſols en deniers, & l'on aura 1092 deniers qu'on diviſera par le même diviſeur 359. On aura 3 deniers au quotient, & le reſte 15 deniers, qui ne peuvent plus être diviſés par le diviſeur 359. Ainſi le quotient total de la diviſion propoſée ſera 105 liv. 11 ſols 3 deniers.

Pour faire la preuve de cette opération, on multipliera à l'ordinaire le quotient par le diviſeur, c'eſt-à-dire, 105 liv. 11 ſols 3 den. par 359, obſervant, ſi l'on met le quotient à la place du multiplicande, de prendre le produit des ſols ſur 359, qui eſt le multiplicateur.

109. On remarquera à cette occaſion, que toutes les fois que les ſols & les deniers appartiendront au multiplicande, *il faudra les prendre ſur le multiplicateur*, & qu'ils ne doivent être pris ſur le multiplicande que lorſqu'ils appartiennent au multiplicateur.

A l'égard des 15 deniers reſtans de la derniere diviſion, on les rapportera à la multiplication auparavant que de faire l'addition des différens produits dont elle eſt compoſée ; & comme 15 deniers font 1 ſol & 3 deniers, on mettra 1 ſol à la colomne des ſols, & 3 deniers à celle des deniers.

S'il étoit reſté un plus grand nombre de deniers, on les auroit diviſé d'abord par 12, pour ſçavoir le nombre de ſols qu'ils auroient contenu, & le reſte de la diviſion auroit été les deniers qu'il auroit fallu ajouter à la colomne des deniers.

Si les ſols produits par les deniers étoient en plus grande quantité que 20, on les diviſeroit par ce nombre 20, pour les changer en livres ; le reſte de la diviſion ſeroit les ſols à ajouter à la colomne des ſols de la multiplication, & le quotient des ſols par le diviſeur 20, donneroit des livres, qu'il faudroit ajouter au produit des livres aux colomnes convenables, c'eſt-à-dire, les unités à la colomne des unités, les dixaines à celle des dixaines, &c.

Si le nombre à diviſer 37897 avoit repréſenté des toiſes, il auroit fallu changer en piés le reſte 202 de la diviſion,

& pour cela, le multiplier par 6, puiſque la toiſe a 6 piés. Ayant diviſé les piés par le diviſeur 359, on auroit multiplié le reſte des piés par 12, pour en faire des pouces, parce qu'un pié vaut 12 pouces, & après avoir diviſé les pouces par le même diviſeur 359, on auroit multiplié le reſte par 12 pour en faire des lignes, & après la diviſion des lignes, on auroit négligé le reſte de la diviſion; mais dans la preuve il auroit fallu rapporter à la multiplication du quotient par le diviſeur, ce que les lignes de reſte auroient produit de toiſes, de piés, de pouces, ou de lignes, de la même maniere que dans la preuve de cette diviſion en livres, on a rapporté à la preuve 1 ſol 3 deniers pour les 15 deniers du reſte de la diviſion des deniers.

Si ce nombre à diviſer avoit repréſenté des années, il auroit fallu multiplier par 12 le reſte de la premiere diviſion, pour en faire des mois, & le reſte de la diviſion des mois par 30, pour en faire des jours, & ainſi de toutes les autres eſpéces qu'on pourra avoir à diviſer, qu'on réduira de même dans les différentes parties dans leſquelles elles ſe ſubdiviſent ordinairement.

Preuve de la Multiplication par la Diviſion.

110. On a dit dans l'Article de la Multiplication, que ſa véritable preuve étoit la Diviſion, & on n'a pû la donner alors, parce qu'on n'avoit point encore parlé de cette Régle : préſentement qu'elle doit être parfaitement connue, c'eſt ici le lieu de donner cette preuve.

On ſuppoſera pour cela qu'il faut multiplier, par exemple, 497 par 37 liv. 19 ſ. 11 d. dont le produit eſt 18883 liv. 18 ſ. 7 den.

	497 37#–19ſ.–11d.
	3479 1491.
Pour 10ſ.	248–10
Pour 5ſ.	124– 5
Pour 2ſ.	49–14
Pour 2ſ.	49–14
Pour 8d.	16–11– 4
Pour 2d.	4– 2–10
Pour 1d.	2– 1– 5
Produit Total	18883#–18ſ.– 7d.

Il eſt évident que ce produit doit contenir le multiplicateur 37 liv. 19 ſ. 11 den. autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicande 497, c'eſt-à-dire 497. Ainſi, comme en le diviſant par ce nombre, on en prend la 497e partie, on doit donc trouver pour le quotient le multiplicateur 37 l. 19 ſ. 11 den. qui eſt exactement la 497e partie du produit, ſi la régle a été faite ſans erreur.

Pour faire cette diviſion, on commencera par diviſer les livres du produit de la précédente multiplication, par le multiplicateur 497. On trouvera pour le quotient 37 liv. avec le reſte 494, qu'on multipliera par 20 pour le changer en ſols; on y ajoutera les 18 ſols du produit, & l'on aura 9898 ſ. à diviſer par le même diviſeur 497; on trouvera pour le quotient 19 ſ. & 455 ſols de reſte, qu'on changera en den. en les multipliant par 12. On ajoutera à leurs produits les 7 d. du produit 18883 l. 18 ſ. 7 d. & l'on aura 5467 d. qu'il faudra auſſi diviſer par 497. Faiſant cette diviſion, l'on aura le quotient 11 ſans reſte; ce qui prouve que le produit 18889 l. 18 ſ. 7 d. contient 497 fois le multiplicateur 37 l. 19 ſ. 11 den. & par conſéquent que l'opération de la multiplication eſt exacte.

18883 ℔ { 37 ℔
497 |
3973
497
494

Reſte des livres qu'il faut multiplier par 20 ſ.

9880

Sols du produit 18

9898 ſ. { 19 ſ.
497
4928
497

Reſte des ſols qu'il faut multiplier par 12 d.

455
910
455.
Deniers du produit 7

5467 d. { 11 d.
497 |
0497
497
000

111. On voit par-là que la multiplication & la diviſion ſe ſervent réciproquement de preuve, de même que l'addition & la ſouſtraction s'en ſervent également.

On fera de la même maniere la preuve de toutes les autres multiplications qu'on pourra propoſer.

Application de la Diviſion à la réſolution de pluſieurs queſtions.

I.

112. *On ſuppoſe qu'un degré du méridien terreſtre eſt de 57183 toiſes, & qu'il vaut 25 lieues communes de France, ſçavoir le nombre des toiſes de la lieue commune.*

Il faut diviſer 57183 toiſes par 25, & le quotient 2284 ſera le nombre des toiſes de la lieue commune.

57183		2287	toiſe
251		25	
071		11435	
25		4574.	
218		reſte 8	
25		57183	Preuve.
183			
25			
reſte 08			

II.

113. *Connoiſſant la circonférence de la terre de 9000 lieues, ſçavoir le nombre des jours qu'il faudroit employer pour en faire le tour, ſuppoſant qu'on faſſe 12 lieues par jour.*

Il eſt clair qu'il faut diviſer 9000 lieues par 12, & que le quotient 750, ſera le nombre des jours demandé.

9000	750	jours
12		
060		
12		
000		

Diviſant ces jours par 365, on trouvera qu'ils contiennent deux années & 20 jours de reſte.

750 { 2 années
365
reſte 20 jours

III.

114. *Lorſque le Muid d'avoine coûte* 150 *livres, à combien revient le Boiſſeau.*

Il faut ſçavoir quel eſt le nombre des boiſſeaux qu'il y a dans le muid.

Le muid eſt compoſé de 12 ſeptiers, & le ſeptier de 24 boiſſeaux. Il y a donc 12 fois 24 boiſſeaux dans le muid, c'eſt-à-dire, 288.

A préſent il faut conſiderer que chaque boiſſeau coûte la 288e partie de 150 liv. Pour avoir cette partie, il faut diviſer 150 par 288; ce qui ne ſe peut, attendu que le dividende 150 eſt plus petit que le diviſeur 288; ce qui prouve d'abord que le boiſſeau vaut moins d'une livre ou de 20 ſols. Pour trouver ſon prix, il faut multiplier les 150 liv. de la valeur du muid par 20, pour les reduire en ſols, qui peuvent être diviſés par 288,

& qui donneront pour le prix du boisseau 10 sols 5 deniers.

	150#	
par	20	
	3000#	{ 10ˢ
	288	
Reste des sols	120	
	12	
	240	
	120.	
	1440ℓ.	{ 5ℓ.
	288	
	000	

Preuve.

	288 Boisseaux	
à		10 — 5ℓ.
Pour 10ˢ	144	
Faux prod. d'un sol.	14 —	8
Pour 4ℓ.	4 —	16
Pour 1ℓ.	1 —	4
Produit	150# —	00

La preuve de cette division se fera

en multipliant 288 boiſſeaux par 10 ſ. 5 d. & le produit de la multiplication donnant 150 liv. fait voir que l'opération de la diviſion eſt exacte.

IV.

115. *UN Colonel fait donner 25 louis d'or de 24 liv. aux ſoldats de ſon Régiment, qu'on ſuppoſe être au nombre de 750, ſçavoir ce qui revient à chaque ſoldat.*

25 louis
à 24 ℔
100
50.
600 ℔
20 ſ.
12000 ſ. } 16
750|
4500
750
000

Il faut d'abord ſçavoir combien 25 louis valent de livres. Pour cela on les multipliera par 24, & on trouvera 600 livres pour le produit. Ce nombre de livres étant plus petit que celui des ſoldats, on le réduira en ſols, en le multipliant par 20; & l'on aura 12000 ſols, qui diviſés par 750, donneront 16 ſols au quotient; c'eſt ce qui revient à chaque ſoldat.

On en fera la preuve en multipliant

750 par 16 ſols, comme on le voit cy-deſſous.

		750 soldats.
à		0 — 16 ſ.
Pour	10 ſ.	375
Pour	5 ſ.	187 — 10
Pour	1 ſ.	37 — 10
		600 ℔ — 00

V.

116. *On ſuppoſe qu'on a jetté pour* 18000 *liv. de bombes dans une Place aſſiegée, & que chacune revenoit à* 8 *liv.* 15 *ſols, ſçavoir le nombre de ces bombes.*

Il eſt évident que la ſolution de cette queſtion ne conſiſte qu'à ſçavoir combien il y a de fois 8 livres 15 ſols dans 18000 liv.

Pour cela il faut reduire les 18000 l. en ſols, de même que les 8 liv. 15 ſols que coûte chaque bombe, & diviſer enſuite les ſols des 18000 liv. par ceux du prix de la bombe, le quotient donnera le nombre de ces bombes, qui ſera de 2057.

18000#		8
20		20
360000		160
17511	{ 2057 }	15
1000		175
175		
1250		
175		
reste 025s.		

Preuve.

	2057 Bomber	
à	8# — 15s.	
	16456	
	1028 — 10	
	514 — 5	
reste	1 — 5	
	18000# — 00	

VI.

117. *On ſçait que le Roi fait payer 500 liv. par mois de 45 jours,* (ce qu'on appelle mois de campagne) *à un Brigadiers de ſes Armées, on demande à quoi ſe montent ſes appointemens pour chaque jour.*

Il ne faut que diviſer 500 liv. par 45, & le quotient 11 liv. 2 ſols 2 den. ſera la paye demandée.

```
5 0 0 ℔ 1 1 ℔
4 5
-------
0 5 0
  4 5
-------
  0 5
  2 0
-------
1 0 0 ℔ 2 ſ
  4 5
-------
  1 0
  1 2
-------
  2 0
1 0
-------
1 2 0 ℔ 2 ℔.
  4 5
-------
reſte  3 0 ℔.
```

Preuve.

45 jours
11 ℔ — 2 ſ. — 2 ℔.

```
45
45.
```

Pour 2 ſ. 4 — 10
Faux prod. de 6 d. pour prendre deſſus les 2 d. 2 — 2 — 8
Pour 2 ℔. 0 — 7 — 6
reſte 0 — 2 — 6

500 ℔ — 0 0 ſ. — 0 ℔.

VI.

DE LA REGLE DE TROIS,

AUTREMENT APPELLE'E

REGLE DE PROPORTION.

118. LA *Regle de Trois* eſt une opération dont on ſe ſert pour trouver un quatriéme terme à trois nombres ou trois termes donnés ; enſorte que le premier terme ſoit grand ou petit par rapport au ſecond, de même que le troiſiéme eſt grand ou petit par rapport au quatriéme.

C'eſt-à-dire, par exemple, que ſi le premier eſt double du ſecond, le troiſiéme doit également être double du quatriéme ; que ſi le premier eſt le tiers du ſecond, le troiſiéme eſt auſſi le tiers du quatriéme.

D'où il ſuit que lorſque le premier terme eſt plus grand que le ſecond, le troiſiéme eſt plus grand que le quatriéme : & que lorſque le premier eſt plus petit que le ſecond, le troiſiéme eſt auſſi plus petit que le quatriéme.

Cette Regle se nomme *Regle de Trois*, parce qu'elle est ordinairement composée de trois termes. On l'appelle aussi *Regle de Proportion*, parce que le quatriéme terme étant trouvé, les quatre termes de la regle font ensemble ce que les Géométres appellent *Proportion*, qui n'est autre chose que quatre nombres arrangés, de maniere que le premier contient ou est contenu dans le second de la même maniere que le troisiéme contient, ou est contenu dans le quatriéme.

Ainsi ces quatre termes, 3, 9, 12 & 36 font une proportion. Car 3 est le tiers de 9, de même que 12 est le tiers de 36.

Une proportion se marque ainsi 3. 9 : : 12. 36. qui s'exprime en disant, *que* 3 *est à* 9 *comme* 12 *à* 36.

119. Une propriété particuliere de quatre nombres ainsi arrangés en proportion, c'est que *le produit du premier terme par le quatrieme est égal à celui du second par le troisiéme.*

Dans la proportion 3. 9 : : 12. 36, le produit de 3 par 36 est 108, de même que celui de 9 par 12. D'où il suit que pour trouver le 4e. terme d'une proportion ou d'une regle de Trois, *il faut multiplier ensemble le second & le troisiéme, & diviser le produit par le premier.*

Car puiſque 9 multiplié par 12 donne le même produit que celui que donneroit la multiplication du premier terme par le dernier, il eſt évident qu'en diviſant ce produit par le premier terme 12, on a un nombre 36 au quotient, qui multiplié par ce même nombre 12, fait auſſi 108; ce qui prouve que ce nombre 36 eſt le quatriéme terme de la Regle de Trois.

Dans les exemples qu'on va donner, on démontrera l'opération de la Regle de Trois, indépendamment de la propriété de la proportion.

EXEMPLES de Regles de Trois.

I.

120. *SI trois Ouvriers font 15 toiſes d'ouvrage pendant un certain tems, combien 9 Ouvriers en feront-ils dans le même tems ?*

On prend toujours pour les deux premiers termes de la regle ceux qui ſont de même eſpece, comme dans cet exemple les nombres 3 & 9 qui expriment des Ouvriers. Le troiſiéme terme eſt celui qui eſt ſeul de ſon eſpece dans les trois termes donnés, & auquel on cherche un quatriéme terme de même eſpece.

On arrange ainsi les trois termes donnés 3. 9 :: 15.

On marque ordinairement le quatriéme terme qu'on cherche d'une maniere indéterminée par une lettre quelconque, comme x. En ce cas, la regle de Trois forme ainsi une proportion, 3. 9 :: 15. x. dont le quatriéme terme est x, mais qui ne sera connu qu'après l'opération.

Pour le trouver, on doit, suivant ce qui a été dit précédemment, *multiplier le second* 9 *par le troisiéme* 15, *& diviser le produit* 135 *par le premier* 3; ce qui donnera 45 pour la valeur de x, c'est-à-dire, pour le nombre des toises que 9 Ouvriers feront dans le même tems que 3 ouvriers en feront 15.

DEMONSTRATION.

121. Pour démontrer cette opération par elle-même, il faut considérer que dans la question proposée, si on sçavoit le nombre des toises que font chacun des 3 premiers Ouvriers, il seroit aisé de trouver ce que 9 Ouvriers en feroient dans le même temps, & cela en multipliant les toises de chaque Ouvrier, par le nombre des Ouvriers. Or, puisque l'on suppose que 3 Ouvriers font 15 toises d'ouvrage pendant le temps fixé,

pour avoir ce que chaque Ouvrier en fait dans le même temps, il faut diviſer 15 par 3, & le quotient 5 eſt le nombre des toiſes de chaque Ouvrier. Préſentement ſçachant que chaque Ouvrier fait 5 toiſes, pour avoir ce que 9 Ouvriers en feront, il faut multiplier 5 par 9, ou 9 par 5; ce qui donnera 45 pour les toiſes que feront les 9 Ouvriers.

122. D'où il ſuit que pour avoir le quatriéme terme de la regle trois, il faut diviſer le troiſiéme par le premier, & multiplier le quotient par le ſecond.

123. Mais comme il arrivera dans pluſieurs cas que le troiſiéme terme diviſé par le premier, ne donnera pas un quotient exact comme il l'a donné dans l'exemple qu'on vient de propoſer, il faut, pour éviter les reſtes, multiplier le troiſiéme terme par le ſecond, & diviſer enſuite le produit par le premier; ce qui donnera le même nombre que le produit du quotient du troiſiéme terme diviſé par le premier, & multiplié après par le ſecond.

Car, dans cet exemple, le troiſiéme terme 15 eſt trois fois plus grand que s'il avoit été diviſé par le premier 3. Son produit par le ſecond 9, eſt trois fois plus grand que ſon tiers 3 multiplié par

le même terme 9. Or le terme que l'on cherche, eſt le tiers de 15 multiplié par 9. Donc, puiſque le produit de 15 par 9 eſt trois fois plus grand que le produit cherché, il faut le diviſer par 3, pour avoir ce produit. Donc, on trouvera dans cet exemple le quatriéme terme de la regle, en multipliant le ſecond & le troiſiéme terme, & diviſant leur produit par le premier.

Comme ce même raiſonnement peut s'appliquer à tous les autres exemples qu'on pourra propoſer, il nous ſervira de démonſtration de la regle de trois. Ceux qui en voudront une preuve plus rigoureuſe, pourront conſulter le Traité des Proportions dans *l'Arithmetique & la Géométrie de l'Officier*.

II.

124. *Si avec* 100 *piſtoles on en gagne* 30, *combien en gagnera-t-on avec* 250?

Il eſt clair que le gain doit être proportionné aux piſtoles. Ainſi on aura 100. 250 :: 30. x.

On trouvera, en faiſant la regle, 75 pour la valeur de x ou du quatriéme terme.

III.

125. *Si 125 ſacs de farine ont produit 22500 rations, * combien en produiront 458 ſacs?*

Comme les ſacs ſont aux aux ſacs, ainſi les rations doivent être aux rations.

125. 458 :: 22500. x.

On trouvera la valeur de x en multipliant 22500 par 458, & diviſant le produit par 125. Le quotient ſera 82440 : c'eſt le nombre des rations que produiront les 458 ſacs de farine, dans la ſuppoſition que 125 en ont produit 22500.

IV.

126. *On ſuppoſe que 150 pas d'une perſonne faſſent 60 toiſes, on demande combien 670 pas de la même perſonne en feront.*

Comme les pas ſont aux pas, ainſi les toiſes ſont aux toiſes.

150. 670 :: 60. x.

* La Ration du ſoldat eſt de 24 onces, ou d'une livre & demie de pain par jour. Un pain de munition qui peſe trois livres, contient deux rations.

On

On trouvera 268 toises pour la valeur du quatriéme terme x.

V.

127. *On ſuppoſe qu'on faſſe un ouvrage en 12 jours en travaillant quatre heures par jour, on demande le nombre des jours qu'on y employeroit ſi on travailloit ſix heures chaque jour.*

Dans cet exemple, les deux termes de même eſpece ſont des heures, & ce ſont eux qui doivent ainſi être les deux premiers de la regle. Il s'agit de ſçavoir lequel doit être poſé le premier.

Pour cela, il faut faire attention à l'énoncé de la regle, & à ce qu'elle propoſe de trouver.

Le terme que l'on cherche eſt des jours, mais il doit être plus petit que le troiſiéme terme de la regle, qui eſt auſſi des jours, car il eſt évident qu'en travaillant 6 heures par jour au lieu de 4, on doit employer moins de jours à faire l'ouvrage. On voit donc qu'il faut mettre pour le premier terme de la regle le plus grand des deux termes de même eſpece, c'eſt-à-dire, le terme 6 des heures, afin de trouver le quatriéme terme moindre que le troiſiéme.

Il faut donc poſer ainſi la regle qu'on vient de propoſer,

6. 4 : : 12. x. On trouvera 8 pour la valeur de ce quatriéme terme x, en faiſant l'opération à l'ordinaire. C'eſt le nombre des jours qu'on employeroit à faire l'ouvrage dont il eſt queſtion, en travaillant 6 heures par jour au lieu de 4.

REMARQUE.

128. Les Arithméticiens appellent les regles de cette derniere eſpece dans leſquelles le plus donne le moins, des Regles de Trois *inverſes* ou *indirectes*, parce qu'en les poſant à leur maniere, il faut, pour les réſoudre, faire l'opération dans un ordre renverſé, c'eſt-à-dire, multiplier le premier & le ſecond terme enſemble, & diviſer le produit par le troiſiéme ou le dernier.

Car pour réſoudre la regle précedente, ils l'arrangeroient de cette maniere : 4. 12 : : 6. x. Or faiſant l'opération à l'ordinaire, en multipliant le ſecond terme 12 par le troiſiéme 6, & diviſant le produit 72 par le premier 4, on trouve 18 pour le dernier terme de la regle. Mais il eſt abſurde qu'en travaillant plus d'heures, on ſoit plus de jours à faire le

même ouvrage ; ce qui prouve que cette regle ne doit pas être faite à l'ordinaire. Si on l'a fait dans un ordre renverſé, en multipliant le premier terme 4 par le ſecond 12, & diviſant le produit par le dernier 6, on a 8 pour le quatriéme de cette regle. C'eſt le nombre qui répond à la queſtion ; car en travaillant ſix heures par jour au lieu de 4, on travaille un tiers de plus ; on doit donc par-là diminuer les jours d'un tiers, & en effet 8 eſt d'un tiers plus petit que 12. Ainſi, 8 eſt le terme qui répond à la queſtion propoſée, & c'eſt le même qu'on a trouvé d'abord en arrangeant les termes de la regle dans l'ordre que demande la nature de la queſtion.

Un peu d'attention fait faire cet arrangement avec facilité. Il n'y a qu'à penſer à ce qui eſt propoſé. Par-là on eſt diſpenſé de conſidérer des regles de trois de deux eſpeces ; ſçavoir de *directes*, qui ſont celles qu'on a vûes dans les quatre premiers exemples, dans leſquelles le plus donne le plus ; & d'*indirectes*, telles que celle qu'on vient de réſoudre, dans leſquelles le plus donne le moins. On le verra clairement dans les exemples ſuivans.

129. Au reſte, il eſt à propos de re-

marquer que les questions de cette espece se peuvent résoudre aisément sans regle de trois ; car puisqu'on est 12 jours à faire un ouvrage, en travaillant 4 heures par jour, il faut donc 48 heures pour le faire. Or, si on veut sçavoir combien on sera de jours à employer ces 48 heures, en travaillant six heures par jour, il est clair qu'on le sçaura en divisant 48 par 6.

VI.

130. *Un Courrier, en faisant 24 lieues par jour, ne peut arriver qu'en 8 jours au lieu qu'il se propose : il est nécessaire, qu'il y arrive en 6, on demande combien il doit faire de lieues.*

En faisant attention à l'exposé de cette question, on voit que le nombre des lieues que le Courrier doit faire par jour, doit augmenter dans le rapport de la diminution des jours, & qu'ainsi il faut arranger de cette maniere les termes de cette regle.

6. 8 :: 24. x. On trouvera en faisant la regle 32 pour la valeur de x.

REMARQUE.

131. On auroit trouvé également ce

même nombre, en obſervant que, puiſque le Courrier employeroit 8 jours à faire ſon voyage, en faiſant 24 lieues par jour, il a 8 fois 24 lieues à faire, c'eſt-à-dire 192 lieues. Or, pour ſçavoir ce qu'il faut qu'il faſſe de lieues par jour pour faire ſon voyage en ſix jours, il eſt évident qu'il ne faut que diviſer 192 par 6; ce qui donne le même nombre qu'on a trouvé par la regle cy-deſſus. Mais on le trouveroit également, comme on le voit, de cette maniere, ſans être inſtruit de la regle de trois.

VII.

132. 45 *Ouvriers feroient un ouvrage en* 54 *jours, ſçavoir ce qu'il faut d'Ouvriers pour le faire en* 12 *jours.*

On voit dans cet exemple, que le moins de jour doit donner plus d'ouvriers : il faut donc que le plus petit des deux termes de même eſpece de la regle, c'eſt-à-dire, 12 jours, ſoit mis le premier : elle doit donc être poſée ainſi. 12. 54 :: 45. x.

Faiſant l'opération à l'ordinaire, on trouvera pour la valeur de x, ou pour le nombre des ouvriers cherché 202, ou plûtôt 203, à cauſe du reſte 6, qui dans

cet exemple exprime une moitié d'ouvrier, qui ne peut avoir lieu.

REMARQUE.

133. Cette queſtion ſe réſoudroit encore en conſidérant, que puiſque 45 ouvriers feroient l'ouvrage dont il s'agit en 54 jours, il faut pour le faire 54 fois 45. journées d'ouvriers, c'eſt-à-dire, 2430 journées. Or, pour trouver le nombre d'ouvriers néceſſaire pour faire toutes ces journées en 12 jours, il n'y a qu'à diviſer 2430 par 12 & le quotient 202 ou 203 ſera le nombre d'ouvriers demandé.

On ne fera plus cette même remarque ſur les regles ſuivantes, les Commençans pourront la faire eux-mêmes. On le leur conſeille, pour acquérir inſenſiblement l'habitude de refléchir ſur les choſes qui leur ſeront propoſés, & ſur les différentes ſolutions qu'elles peuvent avoir.

VIII.

134. *Lorſque le ſeptier de bled coûte* 16 *liv. on a ſix livres de pain pour une certaine monnoye ; lorſqu'il ne vaudra plus que* 12 *liv. combien en aura-*

l'on pour la même monnoye ?

La diminution du prix du bled donne plus de pain pour la même monnoye, il faut donc trouver le quatriéme terme de la regle plus grand que 6. Ainſi, le premier terme doit être le plus petit des deux termes de même eſpece ; & elle doit ſe poſer de cette maniere :

12. 16 :: 6. x.

On trouvera pour la valeur de x le nombre 8, c'eſt celui des livres de pain qu'on demande.

I X.

135. *Si une Plaine d'une certaine étendue a fourni du fourage pour* 16000 *chevaux pendant* 18 *jours, combien* 22000 *chevaux pourront-ils y ſubſiſter de jours ?*

Le plus de chevaux donnera moins de jours, c'eſt pourquoi il faut, dans l'arrangement de la regle, mettre le plus grand nombre de chevaux au premier terme, & la poſer ainſi,

22000. 16000 :: 18. x.

On trouvera 13 pour la valeur du

quatriéme terme, c'eſt-à-dire, pour le nombre des jours qu'on demande.

	18	
	128000	
	16000.	
	288000	{ 13 jours
	22000.	
	.68000	
	.22000	
reſte	..2000	

De la Preuve de la Regle de Trois.

136. La Regle de Trois ſe prouve par une autre Regle de Trois.

On prend pour les deux premiers termes de la nouvelle regle, le troiſiéme & la quatriéme de la premiere; & pour le troiſiéme, le premier de la même. Faiſant enſuite l'opération, elle doit donner pour le quatriéme terme de la nouvelle regle le ſecond de la premiere.

Par exemple, pour faire la preuve de la regle de l'exemple premier, n. 120, dont les trois termes donnés ſont 3, 9, & 15, & dont le quatriéme a été trouvé de 45; on prendra 15 pour le premier terme,

terme, 45 pour le ſecond, 3 pour le troiſiéme; & faiſant enſuite l'opération de cette ſeconde regle, on trouvera 9 pour ſon quatriéme terme; ce qui prouve que la regle a été faite exactement.

On peut également prendre le quatriéme terme pour le premier, le troiſiéme pour le ſecond, & le ſecond pour le troiſiéme; alors en faiſant l'opération, on doit trouver pour le quatriéme terme le premier de la regle dont on fait la preuve.

Remarque.

137. Il faut obſerver que ces preuves ne peuvent ſe faire facilement que lorſque la diviſion qui donne le quatriéme terme, ſe fait exactement ou ſans reſte. Lorſqu'il y en aura un, on fera en particulier la preuve de la multiplication & de la diviſion qu'on fait dans la regle de Trois : ces deux opérations étant exactes, la regle le ſera auſſi.

Des regles de Trois compoſées.

138. Les queſtions que l'on peut réſoudre par le moyen de la Regle de Trois, renferment quelquefois plus de

trois termes, alors il faut les réſoudre par pluſieurs regles de Trois, ce qui leur fait donner le nom de *Régles de Trois compoſées*. On appelle *Régles de Trois Doubles*, celles qui ont cinq termes, & qui exigent deux regles ſimples; *Triples*, celles qui en exigent trois, & ainſi des autres.

PREMIER EXEMPLE.

139. *SI* 100 *ſoldats dépenſent* 40 *écus en trois jours, en quel nombre de jours* 10000 *ſoldats dépenſeront-ils* 200000 *écus?*

Le nombre des jours que l'on cherche dépend du nombre des ſoldats & du nombre d'écus, on le trouvera par deux regles de trois de cette maniere.

Pour la premiere, on dira, comme les 100 ſoldats ſont aux 10000 ſoldats, ainſi la dépenſe des premiers (40 écus pendant trois jours,) eſt à la dépenſe des ſeconds pendant le même tems: ou 100. 10000 :: 40. x.

On trouvera 4000 écus pour le quatriéme terme de cette regle: c'eſt ce que dépenſeroient les 10000 ſoldats pendant trois jours.

Il s'agit de sçavoir à présent en combien de tems ils dépenseront 200000 écus.

On le trouvera en disant : comme 4000 écus est à 200000 écus, ainsi 3 jours est au nombre de jours cherché ou 4000. 200000 :: 3. x.

On trouvera 150 pour ce quatriéme terme x. C'est le nombre de jours qui répond à la question proposée.

SECOND EXEMPLE.

140. *SI 450 Travailleurs font 1200 toises de tranchée en 3 nuits, en travaillant 6 heures chaque nuit, combien 1350 Travailleurs en feront-ils en 5 nuits, en travaillant 4 heures par nuit ?*

Il est clair par l'énoncé de cette question, que le nombre de toises que l'on cherche, dépend de trois choses ; sçavoir, des ouvriers, des nuits, & des heures de leur travail. Il y aura ainsi trois comparaisons ou trois regles de Trois à faire. La premiere sera celle des ouvriers, & elle se posera ainsi,

$$450.^{\text{Ouv.}}\ 1350^{\text{Ouv.}} :: 1200^{\text{toif.}}\ x.$$

On trouvera pour le quatriéme terme de cette régle 3600. C'eſt le nombre de toiſes que feroient les 1350 ouvriers dans le même tems que les premiers en feroient 1200.

Comme les derniers ouvriers travaillent plus de nuits que les premiers, leur travail doit augmenter dans le rapport des nuits. Pour le trouver porportionné aux nuits, on dira, *Comme 3 nuits eſt à 5 nuits, ainſi 3600 toiſes eſt au nombre de toiſes que les 1350 ouvriers feroient en 5 nuits, en travaillant autant d'heures que les premiers*, c'eſt-à-dire, que la ſeconde regle de Trois doit être poſée de cette maniere,

3 nuits ſont à 5 :: 3600 toiſ. x.

Faiſant cette regle, on trouvera pour le quatriéme terme 6000 toiſes.

Mais ces 6000 toiſes ſont trouvées dans la ſuppoſition que les 1350 Travailleurs travaillent 6 heures chaque nuit; les 6000 toiſes doivent diminuer dans le rapport des heures de travail. Pour avoir cette diminution, il faut faire une troiſiéme regle de Trois poſée de cette maniere,

Comme 6 heures ſont à 4 heures, ainſi 6000 toiſes ſont au quatriéme terme

cherché, ou 6. 4 :: 6000. *x.*

On trouvera pour ce quatriéme terme 4000 toiſes. C'eſt le nombre qui répond à la queſtion propoſée, c'eſt-à-dire, c'eſt celui que feroient les 1350 ſoldats en 5 nuits, en travaillant 4 heures chaque nuit, dans le tems que les 450 Ouvriers en feroient 1200 en 3 nuits, en travaillant 6 heures par nuit.

REGLE DE COMPAGNIE.

141. *La Regle de Compagnie* eſt une Regle qui ſert à partager un nombre donné en parties ſemblables à celles d'un autre nombre auſſi donné. Elle ne conſiſte que dans la regle de Trois répetée autant de fois que l'on a de différens partages à faire. Quelques exemples ſuffiront pour mettre en état d'en réſoudre un grand nombre d'autres, ſans qu'il ſoit queſtion d'entrer ſur cela dans un grand détail.

PREMIER EXEMPLE.

142. *On ſuppoſe que trois Particuliers s'étant aſſociés enſemble, ont fait un fonds de* 48000 *liv. avec lequel ils ont gagné* 120000 *liv; il s'agit de*

partager ce gain entre ces Associés, proportionnellement à la quantité d'argent que chacun a fourni.

Si chacun de ces Particuliers avoit mis la même somme, il est évident qu'il faudroit partager le profit également.

Mais on suppose,

que le premier à mis	12000#
Le second	16000
Et le troisiéme	20000
Total du fonds.	48000#

Il faut faire autant de regles de Trois qu'il y a de particuliers, & prendre pour les deux premiers termes de toutes ces regles le fonds 48000 livres & le gain 12000 liv. Les troisiémes termes seront les parties que les Particuliers ont chacun contribué pour faire le fonds de 48000 liv.

La premiere regle se posera ainsi, pour trouver le gain de celui qui a mis 12000 liv.

Si 48000 *liv. gagnent* 120000 *liv. combien gagneront* 12000 *livres?*

Ou 48000. 120000 :: 12000. *x*.

On trouvera 30000 livres pour le gain du premier.

Pour le ſecond, on dira de même : Si 48000 liv. gagnent 120000 livres, combien doivent gagner 16000 liv.

Ou 48000. 120000 :: 16000. x.

On trouvera pour le quatriéme terme de cette regle, ou pour le gain du ſecond aſſocié 40000 liv.

Pour le troiſiéme, on dira de même, Si 48000 liv. gagnent 120000 livres, que doivent gagner 20000 livres ?

Ou 48000. 120000 :: 20000. x.

La regle étant faite, donnera 50000 liv. pour le gain du troiſiéme.

On fera la preuve de cette regle en ajoutant enſemble les trois profits particuliers, dont la ſomme doit être égale aux 120000 liv. du gain de la Societé.

Gain du premier	30000#
Gain du ſecond	40000
Gain du troiſiéme . . .	50000
Preuve	120000#

REMARQUES.

I.

143. Il eſt clair que cette regle n'au-

roit pas été plus difficile ſi on avoit ſuppoſé un plus grand nombre d'Aſſociés, mais que ſon opération auroit ſeulement été plus longue.

II.

144. Lorſqu'il ſe trouve un reſte dans les diviſions des regles de Trois qu'on fait pour la regle de Compagnie, il faut pour la preuve additionner enſemble les reſtes de chaque diviſion, les diviſer enſuite par le diviſeur commun, ou par le fonds de la ſocieté, ou le premier terme de toutes les regles de trois : ce diviſeur ſera toujours contenu un certain nombre de fois exactement dans ces reſtes, lorſque l'opération ſera exacte, & il ne s'agira plus que d'ajoûter à l'addition de tous les gains particuliers, autant d'unités qu'il ſera contenu de fois dans les reſtes, & l'on aura, ſi la regle eſt bien faite, le fonds total qui étoit à partager ; c'eſt ce qu'on va pratiquer dans l'exemple ſuivant.

SECOND EXEMPLE.

145. *On ſuppoſe que 3 Officiers de Cavalerie ont fait un profit de 12000 liv. ſur les fourages de leurs chevaux*

pendant leur quartier d'hyver, on demande ce qui doit revenir à chacun d'eux de cette ſomme.

On ſuppoſe que

Le premier Officier avoit	50	Chevaux.
Le ſecond	120	
Et le troiſiéme	140	
TOTAL	310	Chevaux.

Cette regle ſe fera comme la précédente, c'eſt-à-dire, qu'on fera autant de regles de Trois qu'il y a d'Officiers; que les deux premiers termes de ces regles ſeront le nombre 310 des chevaux, & le gain 12000 livres; qu'à l'égard des troiſiémes termes, ils ſeront formés du nombre des chevaux de chaque Officier. Les quatriémes termes qu'on trouvera, donneront le gain de chacun.

Pour avoir le gain du premier Officier, l'on dira: *Si 310 chevaux gagnent 12000 liv. combien gagneront 50 chevaux?*

Ou 310. 12000 :: 50. *x*.

Faiſant l'opération de cette regle de Trois, on trouvera pour le gain de ce premier Officier, 1935 liv. 2 ſ. 8 den.

avec le reſte 40 deniers.

La regle pour le gain du ſecond ſera 310. 12000 :: 120. *x*.

On trouvera pour ſon quatriéme terme 4645 liv. 3 ſ. 2 den. avec le reſte 220 deniers.

Pour avoir le gain du troiſiéme, l'on fera auſſi 310. 12000 :: 140. *x*, qu'on trouvera de 5419 liv. 7 ſols 1 den. avec le reſte 50 den.

On fera la preuve de cette regle de compagnie, comme celle de la précédente, c'eſt-à-dire, en ajoutant enſemble les profits de chaque Officier dont la ſomme doit être égale à 12000 livres; mais comme il y a des reſtes dans les diviſions des regles de Trois, on ajoutera ces reſtes enſemble & l'on diviſera leur ſomme 310 par le diviſeur commun, qui dans cet exemple eſt auſſi 310, on aura le quotient 1, qu'il faudra ajouter à la colomne des deniers de la preuve, ainſi qu'on vient de le marquer ci-devant.

Gain du 1er. Officier	1935^#-9^s—8^d.
Gain du ſecond	4645—3—2
Gain du troiſiéme	5419—7—1
Quotient des reſtes diviſés par 310	1
Preuve	12000^#-0—0^d.

Regle de Compagnie par tems.

146. Cette regle eſt appellée par tems, parce que les Particuliers qui font un fonds de ſociété, y mettent chacun leur argent pour un tems limité. Ainſi le gain de la ſociété doit ſe partager, non-ſeulement ſuivant la quantité dont chaque Particulier a contribué au fonds commun, mais encore ſuivant le tems qu'il a laiſſé ſon argent dans ce fonds.

EXEMPLE.

147. *On ſuppoſe que trois Particuliers ont fait enſemble, pour une entrepriſe de commerce, un fonds d'argent;*

Que le premier a mis 30000 livres pour 8 mois;

Le ſecond 20000 liv. pour 16 mois;

Et le troiſiéme 12000 livres pendant 4 mois.

On ſuppoſe auſſi que la Société a fait 50000 liv. de profit pendant le plus long terme de ſa durée, c'eſt-à-dire, pendant 16 mois; ſçavoir ce qu'il revient de profit à chacun?

Pour découvrir quel doit être ce produit, je conſidere qu'une ſomme d'argent miſe dans un fonds pour un tems quelconque, comme pour 8 mois, doit produire la même choſe que ce qu'une ſomme huit fois plus grande produiroit en un mois. D'où je conclus qu'il faut multiplier la ſomme que chaque Particulier a miſe dans la Société par le nombre des mois qu'elle y eſt demeurée, & qu'il faut regarder le produit qui en réſulte comme le fonds fait par ce Particulier.

Ainſi je multiplie les 30000 livres du fonds du premier par le nombre 8 des mois que ſon argent eſt reſté dans la Société; ce qui donne le produit 240000 liv. que je regarde comme le fonds du premier.

Je multiplie de même les 20000 liv. du ſecond par les 16 mois que ſon argent eſt reſté dans la Société, ce qui produit 320000 liv. que je regarde auſſi

comme le fonds du ſecond.

Enfin je multiplie les 12000 liv. du troiſiéme par 4, c'eſt-à-dire, par le nombre des mois que ſon argent a reſté dans la Société, & j'ai le produit 48000 liv. que je regarde comme le fonds du troiſiéme Particulier.

Fonds ſuppoſé du premier	240000*
Du ſecond.....	320000
Du troiſiéme.....	48000
Total.....	608000*

J'ajoute enſemble ces 3 produits, & j'ai 608000 liv. que je regarde comme le fonds qui a gagné 50000 liv.

Il ne s'agit plus après cela que d'opérer comme dans la regle de compagnie ſimple, c'eſt-à-dire, de faire autant de régles de Trois qu'il y a de Particuliers, dont les deux premiers termes ſeront 608000 liv. & 50000 liv.

On aura pour la premiere

608000. 50000 :: 240000. *x*.

Le quatriéme terme de cette régle, ou le gain du premier, ſera de 19736 liv. 16 ſ. 10 d. avec un reſte de 64000 deniers.

Pour le gain du ſecond, on poſera 608000. 50000 :: 320000. x. On trouvera pour le quatriéme terme de cette regle, 26315 liv. 15 ſ. 9 deniers, avec un reſte de 288000 deniers.

Pour le gain du troiſiéme, on poſera de même 608000. 50000 :: 48000. x. On trouvera ce quatriéme terme de 3947 liv. 7 ſ. 4 den. avec un reſte de 256000 deniers.

On fera la preuve de cette regle de compagnie, en additionnant, comme dans la précédente, le gain de chaque Aſſocié, dont la ſomme doit être égale aux 50000 liv. du gain total de la Société.

Gain du premier	19736#	16ſ	10d.
Gain du ſecond	26315	15	9
Gain du troiſiéme	3947	7	4
Pour le quotient de la ſomme des reſtes diviſée par le diviſeur commun...		0	1
Preuve.....	50000#	00ſ	0d.

Fin de l'Arithmetique.

ABREGÉ D'ARITHMETIQUE ET DE GÉOMÉTRIE.

SECONDE PARTIE.

Contenant la Géometrie..

I.

Définitions ou explications des differentes propoſitions dont on ſe ſert dans la Géométrie, & de ſes premiers principes.

LA GEOME'TRIE eſt une ſcience qui a pour objet les propriétés du corps ou de l'étendue. Elle enſeigne généralement à faire des figures, à les me-

ſurer, & à en découvrir les différens rapports.

1. On appelle *Propoſition* l'expreſſion dont on ſe ſert pour énoncer ce que l'on propoſe. Voici celles qui ſont les plus en uſage dans la Géométrie.

2. *Définition*, eſt l'explication d'un mot ou d'une choſe, qui en détermine l'idée, & qui ne convient qu'au mot ou à la choſe.

3. *Axiome*, eſt une propoſition ſi évidente, qu'elle n'a pas beſoin de démonſtration.

4. *Theorême*, eſt une propoſition dont il faut faire voir la vérité.

5. *Problême*, eſt une propoſition par laquelle il s'agit de faire quelque choſe, & de démontrer qu'on l'a fait.

6. *Corollaire*, eſt une ſuite ou une conſéquence d'une propoſition précédente.

Axiomes qui ſervent de baze ou de premiers principes à la Géométrie.

I.

7. Le Tout eſt plus grand que ſa partie, mais il eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble.

II.

II.

8. Si de plusieurs choses égales on en retranche d'autres aussi égales, les restes seront égaux, & si on leur en ajoute d'égales, les sommes seront aussi égales.

III.

9. Si à des choses quelconques, on ajoute une même chose, & que les sommes se trouvent égales, ces choses étoient égales avant l'addition; & si de plusieurs choses on en retranche la même chose, & que les restes soient égaux, les choses étoient aussi égales entr'elles avant le retranchement de la derniere.

IV.

10. Deux ou plusieurs grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entr'elles.

V.

11. Les produits de plusieurs choses égales, sont égaux, & les nombres égaux divisés par d'autres nombres aussi égaux, sont égaux.

Il y a des propositions *directes*, & des propositions *converses*.

12. La proposition directe, est celle

qui annonce une vérité qui se tire d'une supposition particuliere, & la converse est celle dans laquelle on prend pour supposition la conséquence de la directe, & où l'on a pour conséquence la supposition de cette directe.

II.

Des lignes & des superficies.

ON distingue dans la Géométrie trois sortes d'étendues ou dimensions.

13. *La ligne* est l'étendue considerée avec une seule dimension, & *la superficie ou surface* l'étendue considerée avec la longueur, & la largeur, ou avec deux dimensions, & enfin le *corps* ou le *solide* est l'étendue, considéré avec ses trois dimensions, c'est-à-dire, avec la longueur, la largeur, la hauteur, épaisseur, ou profondeur.

REMARQUE.

14. Il n'y a point de corps ou d'étendue sans les trois dimensions, dont on vient de parler; mais on peut les considérer chacune en particulier, en

faiſant abſtraction des autres.

Par exemple, lorſqu'on parle de la diſtance d'une Ville à une autre, comme de Paris à Rome, on ne fait aucune attention à la largeur du chemin, on conſidére ſeulement la longueur de l'eſpace qui eſt entre ces deux Villes, c'eſt-à-dire, qu'on conſidere alors l'étendue avec une ſeule dimenſion. De même, lorſque l'on parle de la glace d'un miroir, on ne fait nulle attention à l'épaiſſeur de cette glace, on conſidere ſeulement ſa longueur & ſa largeur; il en eſt de même, lorſqu'il s'agit de l'étendue d'un champ ou d'un terrain, car on ne fait non plus aucune attention à ſa profondeur, on conſidére donc alors l'étendue avec deux dimenſions. Mais ſi l'on examine la maſſe d'un corps, comme une piece de bois, une pierre, un lingot d'or, l'excavation d'un foſſé, &c. on fait attention alors aux trois dimenſions du corps, qui eſt d'autant plus grand, qu'il a plus de longueur, de largeur, & de hauteur ou profondeur.

15. *Le point Mathématique* eſt une partie de l'étendue qu'on conſidere comme indiviſible, ou ſans longueur, largeur ni profondeur.

Soit le corps A B C D E F, toutes Fig. 1.

ſes parties extérieures conſidérées ſans épaiſſeur, forment ſa ſuperficie, & le corps, eſt l'eſpace terminé ou renfermé par cette ſuperficie.

La ſuperficie eſt donc le terme du corps, puiſqu'elle le termine ; mais elle eſt terminée elle-même par des lignes qui ſont ainſi les termes de la ſuperficie ; ces lignes n'ont ni largeur, ni épaiſſeur, ce qui les termine n'a donc ni longueur, ni largeur, ni profondeur. Donc, ce ſont des points Mathématiques.

La ligne eſt *droite* ou *courbe*.

Fig. 2. 16. La *ligne droite* eſt celle qui va directement d'un point à un autre, comme la ligne AB. Elle exprime le plus court chemin, ou la plus courte diſtance entre les deux points A & B.

Fig. 3. 17. La *ligne courbe* eſt celle qui ne va pas directement d'un point à un autre, comme la ligne CD, qui ne va pas du point C au point D par le chemin le plus court : ainſi elle n'eſt pas la plus courte qu'on puiſſe tirer entre les points C D.

Fig. 4. 18. On appelle *ligne courbée*, une ligne compoſée de pluſieurs lignes droites, d'une grandeur ſenſible, comme la ligne A B C D.

THEOREME I.

19. *La position d'une ligne droite, comme AB, est déterminée par celle de ses deux points A & B.*

Car il est clair que d'un point comme A, on peut faire partir une infinité de lignes droites, comme AC, AD, &c. Mais que si l'on marque un autre point comme B, par où la ligne droite doive passer, sa position AB est alors déterminée par les deux points A & B. Fig. 1.

20. Il suit de-là, 1°. que lorsque dans la suite on cherchera à décrire une ligne droite dans des circonstances demandées, il faudra seulement trouver deux points dans ces circonstances, & que la ligne droite qui passera par ces deux points, sera la ligne demandée.

21. 2°. Que les deux points A & B de la ligne droite AB, qui déterminent la position de cette ligne, déterminent également celle de toutes les lignes droites qui passeront par ces deux points, & qui s'étendront, à l'infini de part & d'autre, car si le prolongement de ces lignes s'écartoit à droit ou à gauche de A ou de B, elles ne seroient plus droi-

tes. Donc les deux points A & B déterminent à l'infini, la position de toutes les lignes droites qui ont deux points de communs avec AB, lesquelles peuvent ainsi être considerées comme des prolongemens de AB.

Fig. 6. 22. 3°. Que deux lignes droites comme AB, CD, ne peuvent se couper que dans un point E, car si elles avoient deux points de communs comme E & F, elles ne feroient qu'une seule & même ligne AB, attendu qu'elles auroient la même position.

THEOREME II.

Fig. 7. 23. *Par deux points quelconques, comme A & B, on peut faire passer une infinité de lignes courbes.*

Cette proposition est évidente, car la courbure des lignes pouvant varier d'une infinité de façons, elles peuvent faire différens détours de tous côtés, & revenir passer par les mêmes points A & B.

24. D'où il suit, 1°. que la situation ou position d'une ligne courbe n'est pas déterminée par deux points, mais qu'il peut en être besoin d'une grande quan-

tité, ſuivant la nature de ſa courbure.

25. Et 2°. que deux lignes courbes peuvent ſe couper dans pluſieurs points.

THEOREME III.

26. *Si par deux points A & B d'une ligne droite, il paſſe pluſieurs lignes courbes, la plus courte eſt celle qui eſt la plus proche de la droite A B, & elles ſont d'autant plus longues, qu'elles s'écartent ou s'éloignent de cette ligne.*

Cette propoſition eſt évidente, car la ligne la plus courte de A en B, eſt la droite B D *: Or, ſi l'on imagine que * N. 16.
cette ligne ſoit exprimée par un fil de ſoye arrêté en A & en B., il eſt clair que Fig. 7.
pour lui donner une direction courbe, il faut lâcher le fil de ſoye de A ou de B, & qu'il en faut lâcher d'autant plus, que la courbure s'éloigne de AB. Donc, &c.

REMARQUE.

27. On ſuppoſe dans la précédente Fig. 8.
propoſition, que la courbure des lignes, eſt à peu près la même; car ſi la plus proche de la ligne droite C D étoit comme la ligne C E D, alors cette ligne

pourroit être plus grande que C F D, qui eſt plus éloigné de C D que C E D.

Il eſt évident que cette même propoſition s'applique aux lignes courbées, comme aux lignes courbes.

Maniere particuliere de conſidérer la ligne & la ſurface.

28. La ligne peut ſe concevoir, comme décrite par le mouvement d'un point qui s'éloigne de ſa premiere poſition.

29. S'il s'en éloigne directement, ſans ſe détourner ni à droite ni à gauche, il décrit une ligne droite; autrement, il décrit une ligne courbe.

30. Il ſuit de cette formation, que la ligne peut être conſiderée comme compoſée d'une infinité de points.

De la même maniere qu'il y a deux ſortes de lignes, ſçavoir, des droites & des courbes; il y a auſſi deux ſortes de ſurfaces ou ſuperficies; ſçavoir,

La ſuperficie *plane* ou *platte*, & la ſuperficie *courbe*.

31. La ſuperficie plane, eſt celle ſur laquelle on peut tirer des lignes droites de tous ſens; telle eſt la ſuperficie d'un miroir ordinaire, d'une table, &c.

32. La ſuperficie courbe, eſt celle ſur laquelle

laquelle on ne peut tirer des lignes droites de tout ſens ; comme la ſuperficie d'une boule, d'une orange, &c.

33. La partie ſaillante ou relevée d'une ſuperficie courbe, ſe nomme ſa partie *convexe*, & ſa partie creuſe ou rentrante, ſe nomme ſa partie *concave*.

34. La ſuperficie peut être conſidérée comme décrite par le mouvement d'une ligne droite qui s'éloigne également & uniformement de ſa premiere poſition. Si elle s'en éloigne par le plus court chemin, elle décrit une ſuperficie plane, autrement elle en décrit une courbe.

35. Une ſuperficie plane, que l'on conſidere ſans faire attention à ſes extrémités, ou comme indéfinie, ſe nomme *plan*.

36. Ainſi, tirer une ligne ſur un plan, n'eſt autre choſe que tirer une ligne ſur une ſuperficie indéfinie, comme ſur un papier, dont on ne conſidere pas la grandeur.

37. On appelle *figure*, un eſpace terminé de tous côtés par des lignes.

38. La *figure plane* eſt celle dont la ſuperficie eſt plane ; celle qui a une ſuperficie courbe, ſe nomme *figure courbe*.

39. Il y a encore la *figure ſolide*, qui eſt le corps ou le ſolide, terminé de tous côtés par des ſurfaces.

III.

Du cercle & de ſa circonference.

Fig. 9. 40. LE cercle eſt une figure plane, terminée par une ligne courbe ABDE, qui a tous ſes points également diſtans d'un point intérieur C, qui ſe nomme le *centre du cercle.*

41. La ligne ABDE, qui termine le cercle, ſe nomme *ſa circonférence.*

Fig. 10. 42. La circonférence du cercle peut être conçûe comme décrite par le mouvement d'une ligne droite, infléxible, autour d'une de ſes extrémités : Car il eſt évident que cette ligne ſe mouvant autour de A, ſon extrémité B décrira une ligne, dont tous les points ſeront également diſtans de A, c'eſt-à-dire, une circonférence de cercle, dont A ſera le centre.

Fig. 11. 43. On nomme *diamétre*, dans un cercle, toute ligne droite comme AB, qui paſſe par ſon centre C, & qui ſe termine de part & d'autre à ſa circonfé

rence ; & l'on nomme *rayon* toute ligne droite, comme C D, tirée du centre C, du cercle à sa circonférence.

44. Il est clair que le diamétre est composé de deux rayons, c'est pour cela qu'on appelle quelquefois le rayon *demi-diamétre*.

45. Un *arc* est une partie quelconque de la circonférence du cercle, comme A C B. La *corde de l'arc* est une ligne droite A B qui en joint les extrémités. Fig. 18.

REMARQUE.

46. La ligne A B est également la corde de l'arc inférieur A D B qui acheve la circonférence, comme celle de l'arc A C B ; mais dans l'usage ordinaire, lorsque l'on parle de la corde d'un arc, on conçoit toujours, à moins qu'on ne l'explique autrement, qu'elle appartient au plus petit arc.

47. On appelle *circonférences concentriques*, des circonférences comme A B D E, *a b d e*, &c. décrites du même centre C. Fig. 18.

48. Les Géométres divisent chaque circonférence de cercle en 360 parties égales, appellées *degrés* ; chaque dégré en 60 parties égales, appellées *mi-*

nutes, chaque minute en 60 secondes; &c.

49. Ainsi, un *dégré* est la 360e partie de la circonférence d'un cercle; or, il y a des circonférences de toutes sortes de grandeurs; il y a donc pareillement des dégrés de différentes grandeurs; de sorte que le dégré n'est pas d'une quantité déterminée, comme d'un pied ou d'une toise; mais que sa grandeur est relative à celle de la circonférence à laquelle il appartient, ce qu'il faut bien remarquer.

THEOREME I.

50. *Dans un cercle, ou dans des cercles égaux, les rayons sont égaux de même que les diamétres, les arcs de même nombre de dégrés, & les cordes qui soutiennent des arcs égaux.*

Cette proposition est évidente, à cause de la définition & de l'uniformité du cercle.

THEOREME II.

51. *Tout diamétre coupe la circonférence & le cercle en deux parties égales.*

Fig. 14. Soit le cercle X, dans lequel on a ti-

ré le diamétre A B, il faut démontrer d'abord, que ce diamétre coupe la circonférence du cercle en deux également.

Pour le prouver, conſidérez le diamétre A B comme une ligne infléxible qui puiſſe ſe mouvoir ſur le centre C, comme ſur un pivot, alors on verra clairement que ſi l'on fait mouvoir B vers D, d'une quantité quelconque comme d'un dégré, A ſe mouvera en même tems vers E d'une pareille quantité; en ſorte que la ligne que B décrira ſera toujours égale à celle que A parcourera dans le même tems. Ainſi, lorſque B ſera parvenu en A, A ſera parvenu en B, donc les deux arcs B D A, A E B ſont égaux; donc le diamétre A B coupe la circonférence du cercle X en deux parties égales.

A l'égard de la 2e partie de la propoſition, il faut conſidérer que les parties ADB, AEB, dans leſquelles le diamétre AB diviſe ſa circonférence, étant égales, ſi on imagine le cercle coupé, ſelon ſon diamétre, & que l'une de ces parties, comme A E B ſoit renverſée ſur l'autre, elles ſe couvriront exactement, & qu'ainſi elles renfermeront le même eſpace, car autrement tous les points de

la circonférence du cercle ne seroient pas également éloignés de son centre, ce qui est contraire à sa définition. Donc les deux parties du cercle, formé par le diamétre A B, sont égales: Donc, le diamétre coupe aussi le cercle en deux également.

Fig. 14. 52. Tout arc, comme A D B, qui a pour corde le diamétre d'un cercle, étant la moitié de la circonférence du cercle, on le nomme *demie conférence*, & comme l'espace renfermé par une demie circonférence & par son diamétre, est de même la moitié du cercle, on le nomme aussi *demi-cercle*.

COROLLAIRE.

Fig. 15. 53. Il suit de la proposition précédente, n. 51. que si l'on prend sur une ligne droite A B un point quelconque, comme C, duquel on décrive un arc sur cette ligne, lequel soit terminé en A & en B de part & d'autre du point C, cet arc sera une demie circonférence; puisque la ligne A B lui servira de diamétre.

THEOREME III.

54. *Si du centre C de plusieurs cir-*

conférences concentriques, on tire à volonté deux rayons C A & C B à la plus grande circonférence, les arcs de chacune de ces circonférences compris entre ces mêmes rayons, auront la même quantité de dégrés.

Pour le démontrer, considérez que si l'arc A B est par exemple la sixiéme partie de sa circonférence, l'arc *a b* sera aussi la sixiéme partie de la sienne. Or, ces circonférences ont le même nombre de dégrés : sçavoir, 360. Donc toutes leurs parties semblables, comme leurs sixiémes parties, leurs huitiémes, &c. auront le même nombre de dégrés. Donc, les deux rayons C A & C B comprennent entr'eux des arcs égaux de toutes les circonférences concentriques renfermées par A B D A. Donc, &c. Fig. 16.

PROBLEMES.

PREMIER PROBLEME.

55. *Deux points étant donnés, tirer une ligne droite de l'un à l'autre.*

Soient les points donnés A & B, on posera une *régle* sur ces deux points, de Fig. 17.

maniere qu'en traçant une ligne le long de la régle avec une plume ou un crayon, elle paſſe par les points A & B, & qu'elle les couvre entiérement.

SECOND PROBLEME.

56. *Décrire un cercle qui ait pour rayon une ligne donnée A B.*

Fig. 18. Il faut prendre un *compas*, poſer une de ſes pointes au point A, & ouvrir l'autre juſqu'à ce qu'elle tombe ſur B, enſuite la premiere pointe reſtant au point A, il faut faire mouvoir l'autre autour de ce point, & elle décrira le cercle demandé.

TROISIE'ME PROBLEME.

57. *Deux points A & B étant donnés ſur un plan, trouver une ligne droite C D qui en ait tous ſes points également diſtans.*

Fig. 19. Comme la ſituation d'une ligne droite dépend de deux points ; il s'enſuit, que pour réſoudre ce problême, il faut ſeulement trouver deux points C & D, également éloignés de A & de B, &

que la ligne qui passera par ces deux points, sera la ligne demandée.

Opération.

De chacun des points A & B pris pour centres, & d'une ouverture de compas prise à volonté; décrivez au-dessus & au-dessous des points A & B, deux arcs qui se coupent en C & en D; tirés par les points d'*intersection*, (c'est ainsi qu'on appelle les points communs à des lignes droites ou courbes qui se coupent) C & D la ligne droite C D, elle aura tous ses points également distans de A & de B.

Pour le démontrer, il faut seulement prouver que le point C est autant éloigné de A que de B, de même que le point D.

Pour cela, considérez que le point d'intersection C est commun aux deux arcs qui se coupent en C; que ces deux arcs sont décrits des points A & B, & d'un même intervalle, par conséquent qu'ils appartiennent à des cercles égaux: qu'ainsi, si on tire les lignes C A & C B, elles seront égales, étant rayons des cercles égaux; mais elles mesurent la distance du point C aux points A &

B, donc ces distances sont égales, puisqu'elles sont mesurées par des lignes égales. Donc le point C est autant éloigné de A que de B. On démontrera la même chose du point D. Donc la ligne C D a tous ses points également distans des deux points donnés A & B.

REMARQUE.

58. Il faut observer que les deux arcs qui se coupent en D, peuvent être décrits d'un rayon plus petit ou plus grand, que celui des arcs qui se coupent en C; qu'il est seulement nécessaire que les deux arcs qui se coupent, ayant le même rayon; comme aussi que les deux points C & D peuvent être pris indifféremment, ou tous les deux au-dessus ou au-dessous des points A & B, parce qu'en pratiquant ce qui vient d'être prescrit pour l'opération, ces points seront à égale distance de A & de B, & qu'ainsi la ligne droite qui passera par l'un & par l'autre, aura toujours tous ses points également éloignés des deux mêmes points.

QUATRIE'ME PROBLEME.

59. Couper une ligne droite A B

en deux parties égales.

Il faut, par le problême précédent, trouver une ligne C D qui ait tous ſes points également éloignés des extrémités A & B de la ligne A B; le point M, dans lequel elle coupera la ligne A B, ſera le milieu de cette ligne. Ce qui eſt évident. Fig. 20.

CINQUIE'ME PROBLEME.

60. *Couper un arc en deux parties égales.*

Trouvez, comme dans le problême précédent, une ligne droite qui ait tous ſes points également diſtans des extrémités A & B de l'arc, & le point M dans lequel elle le coupera, ſera le milieu de cet arc. Fig. 21.

REMARQUE.

61. On peut, par ce dernier problême, couper un arc en 4, 8, 16, &c. parties égales, en le diviſant d'abord en deux également, & diviſant enſuite chaque moitié auſſi en deux également; puis chaque quart de même, &c.

SIXIE'ME PROBLEME.

62. Faire paſſer la circonférence d'un cercle par trois points donnés A, B & C, qui ne ſont pas rangés en ligne droite.

Fig. 24. Il faut trouver d'abord une ligne droite D E, qui ait tous ſes points également diſtans des deux premiers points donnés A & B; puis une autre ligne droite F G qui ait auſſi tous ſes points également diſtans du point B & du point C; ces lignes ſe couperont dans un point H, qui ſera le centre du cercle qui paſſera par les trois points donnés; en ſorte, que ſi de ce point pris pour centre, & de l'intervalle H A on décrit une circonférence de cercle, elle paſſera par B & par C.

Pour le démontrer, il faut conſidérer que le point H appartient également aux deux lignes D E, F G. Si on le conſidére, comme appartenant à la premiere ligne, il eſt également diſtant de A & de B, & ſi on le conſidére après cela comme faiſant partie de la ſeconde, il eſt également diſtant de B & de C; les diſtances A H & H C ſont donc chacune égales à la diſtance H B; donc ces trois

distances ſont égales *. Donc, &c. * N. 10

COROLLAIRE.

63. Il ſuit de ce problême que trois points qui ne ſont pas rangés en ligne droite, déterminent la grandeur du cercle dont la circonférence paſſe par ces points ; en ſorte que toutes les circonférences qui paſſeront par ces trois points, auront toujours le même centre & le même rayon, c'eſt-à-dire, qu'elles ſeront égales.

Exécuter ſur le terrain les Problêmes précédens.

Tous les problêmes renfermés dans cet article peuvent s'exécuter ſur le terrain preſque auſſi facilement que ſur le papier. On va le faire voir en peu de mots.

64. 1°. Pour tracer une ligne droite ſur le terrain, qui paſſe par deux points donnés A & B.

Il faut planter un piquet en A, & un autre en B ; tendre enſuite un cordeau d'un piquet à l'autre, & tracer la ligne A B le long de ce cordeau. Fig. 25.

Si les piquets A & B ſont fort éloignés l'un de l'autre, on fera mettre quelque choſe au haut du piquet B, qui puiſſe ſervir à le faire diſtinguer de loin,

comme une carte à jouer, ou du papier blanc. On ſe mettra enſuite derriere le piquet A, & l'on fera planter d'autres piquets entre A B, de maniere qu'ils ſe trouvent cachés par le piquet A, & qu'ils puiſſent être conſiderés comme des points de la ligne A B, ou, ce qui eſt la même choſe, qu'ils ſoient tous dans l'alignement ou la direction de A & B. Tendant après cela un cordeau ſucceſſivement d'un piquet à l'autre, on tracera la ligne A B le long de ce cordeau.

REMARQUE.

Fig. 26. 65. Il eſt évident, que lorſque l'on a deux points A & B, donnés ſur le terrain, on peut prolonger à volonté la ligne droite qui paſſe par ces deux points; car pour cela il ſuffit de faire planter des piquets au-delà de B, & dans l'alignement de A & de B, comme en C & en D, & tracer enſuite avec le cordeau la ligne A D.

Fig. 27. 66. 2°. Pour tracer la circonférence d'un cercle ſur le terrain, le rayon C A, & le centre C étant donnés;

On prendra un cordeau de la longueur du rayon, lequel aura un nœud coulant à chacune de ſes extrémités. On plan-

tera, ou on enfoncera un piquet au centre C du cercle, dans lequel piquet on paſſera un des nœuds coulans du cordeau égal au rayon. On mettra après cela un piquet A dans le deuxiéme nœud coulant, & tenant le cordeau bien tendu, on fera tourner le piquet A autour du piquet C, de maniere que la pointe de ce piquet trace une ligne courbe ſur le terrain. Cette ligne ſera la circonférence du cercle demandé. Ce qui eſt évident.

67. 3°. Pour trouver une ligne droite C D qui ait tous ſes points également diſtans de deux points donnés A & B ſur le terrain.

On plantera un piquet à chacun des Fig. 283
points A & B. On prendra enſuite un cordeau d'une longueur à volonté, qui ait un nœud coulant à chacune de ſes extrémités. On paſſera un de ces nœuds autour du piquet A, & l'on paſſera un deuxiéme piquet à l'autre extrémité du cordeau. Enſuite, le cordeau étant bien tendu, on tracera avec le ſecond piquet, un arc ſur le terrain vers C, puis un autre vers D. On ôtera le cordeau du piquet A, on le mettra au piquet B, & avec le piquet de l'autre extremité, on tracera un arc vers C, puis un autre vers D,

qui coupent les deux premiers arcs en C & en D. On enfoncera après cela un piquet en C, puis un autre en D, par le moyen desquels on tracera avec le cordeau, la ligne CD qui aura tous ses points également distans de A & de B. Cette ligne pourra être prolongée autant qu'on le voudra, en plantant de part & d'autre de nouveaux piquets dans l'alignement des deux premiers C & D.

Il est clair que tous les autres problêmes de cet article qu'on a résolus sur le papier, n'auront aucune difficulté sur le terrain, après le détail qu'on vient de donner sur les trois premiers.

I V.

De l'Angle.

68. L'*ANGLE* est l'ouverture ou l'écartement de deux lignes quelconques, comme A B & B C, qui se rencontrent dans un point B.

Fig. 29. 69. Les lignes AB, BC se nomment les côtés de l'angle, & le point B de leur rencontre, sa *pointe* ou son *sommet*.

70.

70. Il faut obſerver que l'angle ſe marque ou s'exprime par trois lettres, dont celle du milieu, ou qui s'exprime la ſeconde, eſt au ſommet. Ainſi on écrit & on prononce, l'angle ABC, ou C B A.

71. Cette obſervation eſt abſolument néceſſaire pour diſtinguer les angles, lorſqu'il y en a pluſieurs qui ont le même point pour ſommet; mais lorſque le ſommet n'appartient qu'à un ſeul angle, on peut, pour abreger, l'exprimer ou le déſigner par la ſeule lettre de ſon ſommet. On déſigne encore quelquefois les angles par une petite lettre écrite dans l'angle, proche le ſommet.

72. *Le plus ou moins de longueur des côtés de l'angle n'augmente ni ne diminue ſa grandeur:*

Car ſuivant la définition de l'angle, il conſiſte dans l'ouverture de deux lignes qui ſe rencontrent dans un point. Or, que ces lignes ſoient prolongées tant que l'on voudra du côté oppoſé au ſommet, ou qu'elles ſoient diminuées, l'ouverture au ſommet reſtera toujours la même. Donc, la longueur ou la petiteſſe des côtés d'un angle ne fait aucune choſe à ſa grandeur.

Des différentes especes d'angles.

73. Les lignes qui par leur rencontre forment un angle, peuvent être ou toutes les deux droites, ou toutes les deux courbes, ou l'une droite, & l'autre courbe.

Fig. 29. 30 & 31. 74. Tout angle, comme A B C, formé de deux lignes droites A B, B C, se nomme *rectiligne*. Celui qui est formé de deux lignes courbes, comme D E F, se nomme *curviligne*: & celui qui est formé d'une ligne droite & d'une ligne courbe, comme l'angle G H I, se nomme *mixtiligne*.

REMARQUE.

75. Lorsque dans la suite de cet Ouvrage, on parlera d'angles, on sous-entendra toujours des angles rectilignes, à moins qu'on ne les désigne autrement.

Fig. 32. 76. *La mesure d'un angle* A B C, est un arc D E décrit entre ses côtés, de son sommet pris pour centre, & d'un intervalle pris à volonté.

Ainsi la valeur ou la grandeur de l'angle s'énonce ou s'exprime par le nom-

bre des dégrés & des minutes que contient l'arc qui lui ſert de meſure.

REMARQUE.

77. Il eſt indifférent de quel intervalle de compas on décrive l'arc qui ſert de meſure à l'angle ; car ſi l'on conſidére le ſommet de l'angle comme le centre de pluſieurs circonférences concentriques, on verra que les arcs de ces différentes circonférences compris entre les deux côtés de l'angle, ont la même quantité de dégrés *. Donc il eſt également meſuré par l'arc qui eſt le plus près du ſommet, de même que par celui qui en eſt le plus éloigné, puiſque ces deux arcs n'ont pas plus de dégrés l'un que l'autre ; ils ne différent donc entr'eux que par l'étendue du dégré, qui eſt plus grand dans le grand arc que dans le petit. Fig. 13. * N. 54.

78. La meſure ou la valeur de l'angle lui fait donner différens noms, ſuivant qu'elle ſe trouve, du quart de la circonférence, c'eſt-à-dire, de 90 dégrés, ou d'une quantité de dégrés au-deſſous ou au-deſſus de ce nombre.

79. On appelle *angle droit*, tout angle comme A B C qui a pour meſure le Fig. 14.

quart de la circonférence, ou 90 dégrés.

Fig. 15. 80. L'*angle aigu*, comme D E F, eſt celui qui a pour meſure un arc moindre que 90 dégrés.

Fig. 16. 81. Et l'*angle obtus* eſt celui qui a pour meſure un arc plus grand que 90 dégrés, comme l'angle G H I.

82. Il ſuit de ce que l'on vient de dire, qu'il n'y a que l'angle droit dont la meſure ſoit déterminée, car elle eſt toujours de 90 dégrés; à l'égard de l'angle aigu & de l'obtus, leur meſure varie; en ſorte que tout angle qui n'a pas 90 dégrés, eſt aigu, & tout angle qui en a davantage, eſt obtus.

REMARQUES.

I.

83. L'angle obtus peut augmenter, juſqu'à ce que ſes deux côtés ne faſſent qu'une ſeule ligne droite; alors il a pour meſure la demi-circonférence: mais comme il n'y a plus d'ouverture entre ſes côtés, l'angle diſparoît: c'eſt pourquoi on peut dire que l'angle de 180 dégrés eſt une ligne droite.

II.

84. L'angle droit ayant pour mesure le quart de la circonférence, il s'ensuit que la circonférence entiere contient la mesure de quatre angles droits, & sa moitié celle de deux droits; en sorte que dire que des angles ont pour mesure toute la demi-circonférence, ou dire qu'ils sont égaux à deux angles droits, sont des expressions synonimes, ou qui signifient absolument la même chose. Il est évident que les côtés qui terminent de part & d'autre des angles qui valent deux droits, font ensemble une ligne droite.

85. On appelle le *complement* d'un angle aigu D B C, un autre angle aigu A B D, qui étant ajouté au premier, le rend égal à un droit. Ainsi le complement d'un angle n'est autre chose qu'un autre angle égal à la quantité dont le premier différe de l'angle droit, ou de 90 dégrés. Fig. 31

86. Et on appelle *supplément* d'un angle obtus F E G, un angle aigu I E H, qui lui étant ajouté, rend l'obtus égal à deux angles droits; ensorte que le supplément d'un angle, n'est autre chose que Fig. 31

la quantité, dont le premier qu'on suppose obtus, différe de la demi-circonférence, ou de 180 dégrés.

THEOREME I.

87. *Les angles qui ont des complemens ou des supplémens égaux, sont égaux.*

Cette proposition est évidente : car les angles qui ont des complemens égaux différent également de 90 dégrés; donc ils sont égaux : & ceux qui ont des supplémens égaux, différent aussi également de 180 dégrés; donc ils sont pareillement égaux.

THEOREME II.

88. *Les angles qui ont pour mesure des arcs égaux, sont égaux.*

Cette proposition n'a pas besoin de démonstration.

THEOREME III.

Fig. 39. 89. *Si l'on prend un point C sur une ligne droite AB, duquel on tire plusieurs lignes vers le même côté, comme*

C D, C E, &c. tous les angles qu'elles feront avec la ligne A B, seront, pris ensemble, égaux à deux angles droits.

DEMONSTRATION.

Soit, du point C pris pour centre, & d'un intervalle à volonté, décrit un arc qui soit terminé par la ligne A B, de part & d'autre du point C. Cet arc sera une demi-circonférence *, & il mesurera * N. 54
tous les angles ACD, DCE, ECF, FCB, qui ont leur sommet au point C; car chacun a pour mesure la partie de cet arc comprise entre ses côtés. *. Or, *N. 76
toutes ces parties valent la demi-circonférence, ou deux angles droits. Donc, tous les angles qu'elles mesurent, valent aussi, pris ensemble, deux angles droits ou 180 dégrés.

Les angles ainsi formés sur une même ligne droite, dont le sommet est au même point, & qui ont leurs côtés au-dessus ou au-dessous de la ligne sur laquelle est leur sommet commun, sont appellés *angles de suite*. Suivant ce que l'on vient de démontrer, la propriété de ces angles est *d'être égaux à deux droits*.

REMARQUE.

90. Il eſt évident que ſi on prolonge au-delà du point C tous les côtés des angles de ſuite, on aura de l'autre côté de la ligne AB, de nouveaux angles de ſuite, ACF, FCG, GCB égaux auſſi à deux droits. D'où il ſuit que lorſque pluſieurs lignes ſe coupent, ou qu'elles paſſent par le même point, tous les angles qu'elles font entr'elles, ſont égaux à quatre angles droits; ce qui ſe prouve d'ailleurs en conſidérant qu'ils ont pour meſure toute la circonférence entiere. Ainſi tous les angles qu'on peut faire autour d'un même point qui leur ſert de ſommet, ne peuvent ſurpaſſer la valeur de quatre droits.

Fig. 40.

THEOREME IV.

91. *Lorſque deux lignes droites ſe coupent, les angles qui ſe trouvent oppoſés par la pointe ou par le ſommet, ſont égaux entr'eux.*

Soient les deux lignes AB, CD, qui ſe coupent dans le point E, les angles CEB, AED qui ont leurs côtés diſpoſés de maniere qu'on peut conſidé-

Fig. 41.

rer

rer le ſecond comme formé par le prolongement des côtés du premier au-delà du ſommet, & ceux du premier par le prolongement de ceux du ſecond auſſi au-delà du ſommet, ſont appellés *oppoſés au ſommet*, de même que les angles A E C, & D E B. Il faut prouver que ces angles, comparés deux à deux, ſont égaux entr'eux.

DEMONSTRATION.

Du point E pris pour centre, & d'un intervalle à volonté, décrivez un arc D A C B, & conſidérez que ſa partie eſt une demi-circonférence * de même que A C B; donc ces deux parties ſont égales. Si on retranche de chacune l'arc A C qui appartient à l'une & à l'autre, on les diminuera de la même quantité. Donc, les reſtes A D & C B ſeront égaux. Mais ces reſtes meſurent les angles oppoſés au ſommet A E D, C E B: donc ces angles ſont égaux. C. q. f. d. *

* N. 534

On démontrera de la même maniere que les deux autres angles oppoſés au ſommet A E C & D E B ſont auſſi égaux entr'eux.

* Ces quatres lettres ſignifient *Ce qu'il falloit démontrer*. On s'en ſert ordinairement pour abréger cette expreſſion.

PROBLEMES.

I.

Fig. 42. 92. *Sur une ligne donnée A B, faire un angle égal donné K E L.*

Du ſommet E de l'angle donné, pris pour centre, & d'un intervalle à volonté, décrivez un arc G H entre ſes côtés. Enſuite du point A pris pour centre, & du même intervalle, décrivez un arc indéfini C D, ſur lequel prenez l'arc C D, égal à l'arc G H, & par le point D & le point A, tirez A D, prolongée à volonté au-delà du point D. L'Angle D A C ſera égal au propoſé K E L : ce qui eſt évident, puiſque par la conſtruction les arcs qui les meſurent, ſont égaux.

REMARQUE.

93. On obſervera ici, que lorſqu'on dit de prendre la grandeur d'un arc, on entend de prendre ſeulement la grandeur de ſa corde, qui eſt une ligne droite, laquelle ſe prend en ouvrant le compas d'une extrémité de l'arc à l'autre : car l'arc, qui eſt une ligne courbe, ne

peut ſe prendre avec le compas; mais comme les arcs égaux ont des cordes égales, & que réciproquement les cordes égales ſoutiennent des arcs égaux dans le même cercle, ou dans des cercles égaux, il en réſulte que prenant la corde d'un arc, c'eſt la même choſe que ſi on prenoit la grandeur ou la meſure abſolue de l'arc. Ainſi, dans la ſuite, lorſqu'on parlera de prendre la grandeur d'un arc, on entendra toujours qu'il faut prendre cette grandeur par celle de ſa corde.

II.

94. *Couper un angle ABC en deux parties égales.* Fig. 43.

Du ſommet de l'angle donné B pris pour centre, décrivez un arc E F entre les côtés de l'angle, qui en ſera la meſure. Enſuite des points E & F pris pour centre, & d'un intervalle pris à volonté, décrivez deux arcs qui ſe coupent dans un point D; tirez du point D au ſommet B, la ligne droite D B, elle coupera l'arc E F en deux également en G, & par conſéquent l'angle donné A B C.

Pour le démontrer, conſidérez que

le point B, centre de l'arc E G F, eſt également diſtant des points E & F de cet arc, & que par la conſtruction, le point D eſt également diſtant des deux mêmes points. Donc la ligne B D a tous ſes points également diſtans de E & de F *: donc elle coupe l'arc EF en deux parties égales.

*N. 19.

III.

Fig. 44. 95. *Sur une ligne donnée E C faire un angle d'un certain nombre de dégrés, comme par exemple de* 40.

105. Pour réſoudre ce problême, il faut ſe ſervir de l'inſtrument X appellé *Rapporteur*. C'eſt un demi-cercle d'argent, de cuivre, ou de corne, diviſé en dégrés & demi-dégrés, lorſqu'il eſt aſſez grand pour que le demi-dégré ſoit ſenſible.

Pour faire un angle de 40 dégrés, ou de tout autre nombre avec cet inſtrument, il faut porter ſon diamétre D E ſur la ligne donnée C E, enſorte que ſon centre C ſoit exactement ſur le point C où doit être le ſommet de l'angle; après quoi il faut compter ſur la circonférence du rapporteur 40 dégrés en commençant par l'extrémité E du diamétre

D E qui touche la ligne E C : on ſuppoſe que le 40e dégré ſe trouve en G, on marquera un point en G, & l'inſtrument étant levé, on tirera une ligne par C & par G, & l'on aura l'angle E C.G de la quantité demandée.

IV.

96. Trouver le nombre des dégrés d'un angle donné.

On le trouvera en poſant le centre du rapporteur au ſommet de l'angle donné, & obſervant que le diamétre ſoit exactement ſur l'un des côtés de l'angle ; alors la partie de la circonférence du rapporteur compriſe entre les deux côtés de l'angle, donnera le nombre de ſes dégrés. Ce qui eſt évident.

V.

97. Méſurer un angle A B C ſur le terrain. Fig. 45.

On ſe ſert communément pour cette opération d'un demi-cercle de cuivre G I D diviſé en dégrés, demi dégrés, & quelquefois en minutes, ſuivant la

grandeur de l'inſtrument, qu'on nomme indifféremment *demi-cercle*, ou *graphométre*.

98. Il eſt élevé ſur un pied L, ſur lequel il peut ſe mouvoir de tout ſens à l'aide d'un genou K, dont la tige entre dans la partie ſupérieure du pied L qui a trois branches qui s'étendent ou ſe reſſerrent à volonté, ſuivant la nature du terrain, pour placer l'inſtrument dans une ſituation fixe. Aux extrémités G & D du diamétre il y a deux petites plaques de cuivre élevées ſur ce diamétre, percées dans le milieu, enſorte que le rayon viſuel qui paſſe par ces ouvertures, paſſe en même temps par le centre de l'inſtrument. Ces plaques ainſi percées, ſont appellées *pinulles*. L'inſtrument a ſur le centre une régle mobile H I, égale au diamétre, aux extrémités de laquelle il y a auſſi deux pinulles H & I percées comme les précédentes, c'eſt-à-dire, que le rayon viſuel qui paſſe par leur ouverture, paſſe en même temps par le centre de l'inſtrument. Cette régle ſe nomme *alidade*.

Lorſque les points qui terminent les côtés des angles qu'on veut meſurer ſont fort éloignés de leur ſommet, on ſe ſert d'un demi-cercle, dont le diamétre eſt

couvert d'une lunette, qui a auſſi pour alilade une autre lunette. A chaque extrémité de ces lunettes, il y a deux fils qui paſſent par le centre du verre de la lunette, en faiſant enſemble des angles droits. Le point de leur ſection tient lieu de l'ouverture de la pinulle. Les opérations ſont plus exactes avec le graphométre à lunette, mais le ſimple à pinulles eſt ſuffiſant pour les opérations qui n'embraſſent pas une grande étendue de terrain.

Après cette deſcription abregée du graphométre, paſſons à ſon uſage.

99. Pour méſurer l'angle A B C avec cet inſtrument, on fera planter un piquet ou un *jalon*, qui eſt un long bâton de cinq ou ſix pieds, dans un point C de la ligne B C, & un autre jalon dans un point A de la ligne A B. Fig. 45.

100. Enſuite l'inſtrument étant ſur ſon pied L, on le placera en B, de maniere que ſon centre réponde parfaitement au point B: pour cela on attache un fil avec un plomb au pié L; ce fil eſt d'une longueur à laiſſer tomber le plomb qui lui eſt attaché, à peu de diſtance du terrain, enſorte qu'on puiſſe voir exactement quand il répond au point B du terrain où eſt le ſommet de l'angle qu'on veut meſurer.

101. Après cela, il faut placer l'inſtrument dans une ſituation ſenſiblement horiſontale, c'eſt-à-dire, qu'il ne ſoit pas plus incliné d'un côté que d'un autre ſur le terrain ; puis il faut le tourner ſur ſon genou, juſqu'à ce qu'en regardant par les pinulles G & D, on apperçoive le jalon C. Cela fait, l'inſtrument reſtant dans la même poſition, il faut faire mouvoir la régle H I, juſqu'à ce qu'en regardant par ſes pinulles on apperçoive le piquet ou jalon planté en A : alors le nombre des dégrés de l'inſtrument compris entre les pinulles D & I, donne la valeur de l'angle A B C : ce qui eſt évident.

REMARQUE.

102. Il faut prendre garde en faiſant mouvoir la regle mobile H I, de déranger le diamétre G D, de ſa direction G C. Pour cela, après avoir mis H I dans l'alignement de A, il faut voir ſi G D eſt encore dans l'alignement de C : s'il y avoit du dérangement, il faudroit replacer G D dans la ſituation convenable, & rectifier ou replacer enſuite H I dans la direction de A.

VI.

103. *Faire un angle ſur le terrain d'une quantité de degrés demandé, comme de* 40 *degrés.*

Ce problême n'a aucune difficulté avec le demi-cercle, dont on vient de faire uſage dans le problême précédent. Car il eſt évident qu'ayant placé l'inſtrument au point où l'on veut que ſoit le ſommet de l'angle demandé, il ne faut que faire planter un jalon dans la direction des deux pinulles fixes G & D, & mettre la regle mobile, enſorte que le milieu de ſes pinulles réponde au 40e degré de l'inſtrument; après quoi faiſant planter un jalon dans la direction de ces pinulles, & mettant auſſi un piquet ou un jalon au point qui répond au centre de l'inſtrument, on aura ſur le terrain l'angle demandé.

REMARQUE.

104. Au défaut du graphomètre, on peut réſoudre les deux problêmes précédens avec un inſtrument incomparablement plus ſimple, & qu'on peut trouver aiſément par-tout. Il s'agit d'une pe-

tite planche de ſix ou huit pouces de long ſur autant de large, ſoutenue par un pied quelconque dans une ſituation horiſontale, comme le graphométre.

Fig. 46. 105. On attache avec de la cire une feuille de papier ſur cette planche, & au lieu de pinulles on ſe ſert d'épingles. On met une épingle A, pour marquer le ſommet de l'angle qu'on veut meſurer, & enſuite on en met une autre B, & une troiſiéme C dans la direction de chaque côté de cet angle ; il eſt clair que tirant enſuite des lignes de A en B, & de A en C, on aura l'angle CAB, ſur le papier collé ſur la planche ; qui ſera le même que celui du terrain. On en pourra connoître la valeur, en le meſurant avec le rapporteur.

Il eſt aiſé de voir qu'un pareil inſtrument n'eſt ni d'une grande dépenſe, ni d'une grande difficulté à avoir. Il ſe nomme *planchette*. Il y a des planchettes plus compoſées avec des pinulles, &c. mais comme elles reviennent alors aſſez au demi-cercle, on n'en parlera pas ici. Celle qu'on vient de décrire, eſt la plus ſimple & la moins couteuſe.

V.

Des lignes perpendiculaires, & des obliques.

106. UNE *ligne perpendiculaire*, est une ligne droite comme CD, qui rencontrant une autre ligne droite AB, fait de part & d'autre des angles droits avec elle; ou, ce qui est la même chose, qui en la rencontrant, ne penche pas plus d'un côté que d'un autre. Fig. 47.

Il suit de-là,

107. 1°. *Qu'une ligne CD perpendiculaire à une autre ligne AB, étant prolongée au-delà du point D vers E, son prolongement DE sera aussi perpendiculaire sur AB.*

Car les angles ADC & CDB étant droits, leurs angles de suite ADE, EDB le seront aussi. Donc, &c. Fig. 48.

108. 2°. Que lorsqu'une ligne droite CD est perpendiculaire sur une autre AB, cette seconde ligne est aussi perpendiculaire à la premiere, car il est évident qu'elle fait aussi des angles droits avec elle. Ainsi lorsque deux lignes sont

perpendiculaires, la premiere l'eſt ſur la deuxiéme, comme celle-ci l'eſt ſur la premiere.

109. *Une ligne oblique*, eſt une li-
Fig. 49. gne droite comme GH, qui rencontrant une autre ligne droite AB, fait des angles inégaux avec elle, ou qui panche plus d'un côté que d'un autre ſur cette ligne.

THEOREME I.

Fig. 50. 110. *D'un point quelconque C pris ſur une ligne droite AB, on ne peut élever qu'une ſeule perpendiculaire CD.*

Pour le prouver, il faut conſidérer que ſuivant la définition de la perpendiculaire, les angles DCB & DCA ſont droits, & qu'ainſi ſi on tire une autre ligne du point C vers D, comme CE, l'angle ECB, qui fait partie de l'angle DCB, ne peut être droit; autrement la partie ſeroit égale au tout, ce qui eſt abſurde : Donc la ligne CE n'eſt pas perpendiculaire ſur AB. Or, comme on démontrera la même choſe de toutes les autres lignes différentes de CD, qui paſſeront par le point C, il s'enſuit, que par ce point on ne peut élever qu'une

ſeule perpendiculaire CD. C. q f. d.

THEOREME II.

111. *Si deux points quelconques C & D, d'une ligne droite, ſont également éloignés de deux points F & G d'une autre ligne droite AB, la premiere ſera perpendiculaire à la ſeconde.* Fig. 51.

DEMONSTRATION.

La ſituation ou poſition d'une ligne droite dépend de deux points *: Or, par la ſuppoſition, les deux points C & D de la ligne droite CD ſont également éloignés des deux points F & G de la ligne AB : Donc la ligne CD a tous ſes points également diſtans des deux mêmes points; donc elle ne panche, ni vers F, ni vers G; donc elle eſt perpendiculaire à la ligne F G, ou AB. C. q. f. d. * N. 19.

COROLLAIRE.

112. Il ſuit de-là, que lorſqu'un point C ou D d'une ligne perpendiculaire CD eſt également éloigné de deux points quelconques, comme F & G de

la ligne ſur laquelle tombe la perpendiculaire, tous les autres points de cette perpendiculaire ſont également éloignés des deux mêmes points.

THEOREME III.

Fig. 52. 113. *D'un point quelconque C, hors une ligne droite AB, on ne peut faire tomber qu'une ſeule perpendiculaire ſur cette ligne.*

Soit du point C abbaiſſé la perpendiculaire C D, il faut démontrer que toute autre ligne qu'on tirera de ce point ſur AB, comme CG, ne ſera pas perpendiculaire à AB.

Pour cela, prenez deux points E & F à égale diſtance du point D, tous les points de la ligne DC ſont également diſtans de ces deux points*; mais la ligne CG qui a le point C de commun avec CD, n'a pas le point G également éloigné de E & de F; car ED, par la ſuppoſition eſt égale à DF; mais EG eſt plus grand que ED: autrement la partie ſeroit égale au tout, ce qui eſt abſurde. Donc le point G n'eſt pas à égale diſtance de E de F: Donc la ligne CG panche plus vers E que vers F: Donc

*N. 112.

elle n'eſt pas perpendiculaire à cette ligne, ou à AB.

114. Il eſt évident qu'on peut démontrer la même choſe de toutes les autres lignes qu'on peut imaginer, tirées de C ſur AB: Donc d'un point donné hors d'une ligne droite, on ne peut faire tomber qu'une ſeule perpendiculaire ſur cette ligne. C. q. f. d.

THEOREME IV.

115. *Si d'un point C, hors une ligne droite AB, on abbaiſſe une perpendiculaire CD, & une oblique quelconque CF, la perpendiculaire CD ſera plus courte que CE.* Fig. 51.

Pour le démontrer, prolongez la perpendiculaire CD en H, enſorte que DH ſoit égale à CD; tirez EH qui ſera égale à CE, car AD étant perpendiculaire ſur CH, & le point D étant par la conſtruction au milieu de CH, tous les points de DA ſeront également éloignés de C & de H *, & par conſéquent EH ſera égale à CE. *N.113.

Maintenant, conſidérez que CH eſt une ligne droite, tirée de C en H, Donc elle eſt plus courte que la ligne

courbée CEH qui paſſe par les deux mêmes points : Donc CD moitié de la droite CH, ſera auſſi plus courte que CE moitié de la ligne courbée CEH: Donc la perpendiculaire C D eſt plus courte que l'oblique CE.

COROLLAIRE.

Il ſuit de cette propoſition.

116. Que la perpendiculaire CD, qui eſt la ligne la plus courte qu'on puiſſe tirer d'un point C hors la ligne AB, ſur cette ligne, ſert à meſurer la diſtance de ce point à la ligne AB.

PROBLEMES.

I.

117. *D'un point donné C ſur une ligne droite AB, élever une perpendiculaire ſur cette ligne.* Fig. 51.

Prenez deux points F & G à égale diſtance du point C, & de ces deux points pris pour centre, décrivez vers le même côté, d'un intervalle pris à volonté, deux arcs qui ſe coupent dans un point D, la ligne droite CD tirée par C & par D ſera la perpendiculaire demandée.

Pour

Pour le démontrer, il faut se ressouvenir que la situation ou position d'une ligne droite dépend de deux points * : Or par la construction, la ligne C D a les points C & D à égale distance de F & de G : Donc tous ses points sont également distans des deux mêmes points: Donc elle est perpendiculaire sur AB. * N. 26.

I I.

118: *D'un point donné C, hors une ligne droite AB, abbaisser une perpendiculaire sur cette ligne.* Fig. 55.

Du point C pris pour centre, décrivez un arc EF qui coupe la ligne AB en deux points E & F ; de chacun de ces points pris pour centre, & d'un intervalle à volonté, décrivez deux arcs qui se coupent dans un point D, au-dessus ou au-dessous de la ligne AB ; Ensuite par D & par C, tirez la ligne CG, elle sera perpendiculaire sur AB.

On démontrera ce problême comme le précédent.

I I I.

119. *D'un point donné A, l'extrémité d'une ligne donnée AB, élever une* Fig. 56.

perpendiculaire sur cette ligne.

Il faut prolonger la ligne AB vers C ; prendre deux points sur CB à égale distance de A, & achever ensuite l'opération comme dans le premier problême.

REMARQUE.

120. On peut encore résoudre ce problême, en faisant au point A, un angle droit avec AB, par le moyen du rapporteur.

On donnera dans la suite d'autres méthodes pour élever une perpendiculaire à l'extrémité d'une ligne, sans avoir besoin de la prolonger, & sans se servir du rapporteur.

Les problêmes qu'on vient de résoudre, peuvent se construire sur le terrain avec la même facilité que sur le papier. Pour le prouver, il suffira d'expliquer seulement la construction du premier sur le terrain.

IV.

121. *D'un point donné D sur la ligne AB, tracée sur le terrain, élever une perpendiculaire CD.*

Fig. 57.

Prenez deux points F & G à égale distance du point D, & enfoncez un piquet dans chacun de ces points : ensuite ayant un cordeau d'une longueur arbitraire qui ait un nœud à chacune de ses extrémités, mettez un de ces nœuds au piquet F, & un piquet à l'autre extrémité du cordeau ; tendez après cela le cordeau, & décrivez, avec le piquet opposé à F, un autre arc vers C ; ôtez le nœud de F, mettez-le au piquet G, & décrivez de même, avec le piquet de l'autre extrémité du cordeau, un arc qui coupe le premier en D : tirant après cela une ligne de C en D avec un cordeau ou autrement, on aura la perpendiculaire demandée.

Ce problême peut encore s'exécuter plus facilement de cette maniere.

122. ayant mis les deux piquets F & G à égale distance du point D, il faut avoir un cordeau qui ait aussi deux nœuds coulans à ses extrémités, & une marque distinctive au milieu. On mettra les nœuds coulans des extrémités dans les piquets F & G ; on tendra ensuite le cordeau par son point du milieu ; on mettra un piquet au point du terrain qui répondra au milieu du cordeau, & la ligne qui sera tirée de ce

piquet au point D ſera la perpendiculaire demandée : ce qui eſt évident.

123. On peut encore élever très-facilement une perpendiculaire d'un point donné ſur une ligne tracée ſur le terrain en ſe ſervant du graphométre ou demi-cercle dont on a donné la deſcription, n. 98.

Il faut poſer cet inſtrument ſur la ligne donnée AB, de maniere que ſon centre réponde exactement au point C, duquel doit partir la perpendiculaire, & que regardant par les deux pinulles du diamétre, on voye un piquet planté en A ou en B ſur la ligne A B : il faut enſuite mettre l'alidade ſur le point de 90 degrés de l'inſtrument, c'eſt-à-dire, enſorte que le rayon viſuel qui paſſera par les pinulles de l'alidade faſſe un angle droit avec le diamétre du demi-cercle. Alors il faut regarder par ces deux pinulles, & faire planter un piquet D dans leur alignement ; en mettre auſſi un qui réponde au centre C de l'inſtrument, & ſi après cela on tire la ligne CD, elle ſera évidemment perpendiculaire ſur AB. Fig. 58.

124. On peut de même d'un point D, hors une ligne AB, faire tomber une perpendiculaire ſur cette ligne avec le même demi-cercle.

Pour cela, il faut mettre d'abord l'alidade ſur le point de 90 degrés, puis s'avancer ſur la ligne AB avec le demi-cercle, de maniere que ſon diamétre ſoit toujours dans la direction de la ligne AB, c'eſt-à-dire, qu'en regardant ou *bornoyant* par les pinulles de ce diamétre, on voye les piquets placés en A & en B ſur la ligne AB. On s'avancera ainſi juſqu'à ce qu'en bornoyant par les pinulles de l'alidade, on voye le point D: Alors on mettra un piquet au point C de la ligne AB qui répondra au centre de l'inſtrument, & la ligne tirée de D en C ſera la perpendiculaire demandée, tirée de C ſur AB.

VI.

Des lignes paralleles.

125. *Les lignes paralleles* ſont des lignes qui ſont dans toute leur étendue, également diſtantes les unes des autres.

126. Il ſuit de cette définition, que des lignes paralleles étant prolongées à l'infini, ne ſe rencontrent point.

Fig. 59. 127. Si les deux lignes AB, CD ſont paralleles, tous les points de la premiere ſeront également diſtans des points de la ſeconde, & comme la diſtance d'un point à une ligne ſe meſure par une *N 116. perpendiculaire *, il s'enſuit que *ſi l'on tire des perpendiculaires EF, GH, entre ces paralleles, elles ſeront égales.*

THEOREME I.

128. *Si deux lignes ſont paralleles, elles ſeront auſſi paralleles à toutes les lignes qui le ſeront à l'une d'elles.*

Fig. 60. Cette propoſition eſt évidente; car ſoient les lignes AB, CD paralleles entr'elles, & EF parallele à CD, il eſt clair que cette ligne ayant tous ſes points également diſtans de AB, EF a auſſi tous ſes points également diſtans de la même ligne. Donc elle lui eſt parallele.

129. L'eſpace, comme ECDE ou ACBD, qui eſt entre deux paralleles, CD, EF, ou AB & CD ſe nomme *eſpace parallele.*

Fig. 61. 130. Lorſque deux lignes paralleles, comme CD, EF, tombent ſur une ligne droite quelconque AB, l'angle EFB hors de l'eſpace parallele eſt appellé *ex-*

térieur par rapport à l'angle intérieur du même côté CDF, ou CDB, qu'on appelle ſon *oppoſé intérieur*.

De même l'angle extérieur ADC a pour oppoſé intérieur l'angle AFE du du même côté.

THEOREME II.

131. *Si deux lignes paralleles CD, EF, rencontrent une ligne droite AB, l'angle extérieur ſera toujours égal à ſon oppoſé intérieur.*

Il faut donc démontrer que l'angle CDB eſt égal à l'angle EFB. Or c'eſt ce qui eſt évident par la définition des paralleles ; car elles doivent être partout également diſtantes les unes des autres : Mais ſi les angles CDB & EFB étoient inégaux, les lignes CD & EF ſeroient inégalement inclinées ſur AB, ainſi elles s'approcheroient d'un côté & s'éloigneroient de l'autre : Donc alors elles ne ſeroient plus paralleles : Donc lorſqu'elles ſont paralleles, l'angle extérieur EFB eſt égal à ſon oppoſé intérieur CDB. C. q. f. d.

On prouvera par le même raiſonnement, que l'autre angle extérieur CDA

est égal à son opposé intérieur EFD ou EFA.

THEOREME III.

Fig. 61. 132. *Si deux lignes droites CD, EF, qui rencontrent une ligne AB, donnent l'angle extérieur EFB égal à son opposé intérieur CDB, elles seront paralleles.*

Cette proposition se démontre de la même maniere que la précédente ; en considérant que lorsque ces angles sont inégaux, les lignes CD & EF ne sont point paralleles ; mais comme il est évident qu'il y a une position dans laquelle elles peuvent être paralleles, il s'ensuit que ce n'est que lorsque l'angle extérieur est égal à son opposé intérieur. Donc, &c.

THEOREME IV.

133. *Lorsque deux lignes sont paralleles, si on eleve une perpendiculaire sur l'une de ces lignes qui rencontre la seconde, elle sera aussi perpendiculaire sur cette ligne.*

Fig. 62. Soient les deux lignes paralleles AB, CD,

CD, & soit élevé sur AB au point F la perpendiculaire FE ; il faut démontrer que cette ligne est aussi perpendiculaire sur CD.

Pour cela, prolongez EF indéfiniment vers G ; alors on pourra regarder les lignes DE, BF comme deux paralleles qui rencontrent la ligne GF. Donc l'angle extérieur GED sera égal à son opposé intérieur EFB * : Mais cet intérieur est droit par la supposition : l'extérieur GED l'est donc aussi, de même que son angle de suite DEF. Donc EF fait aussi des angles droits avec CD : Donc elle est perpendiculaire sur cette ligne. * N. 131.

THEOREME V.

134. *Deux, ou un plus grand nombre de perpendiculaires sur une même ligne, sont paralleles entr'elles.*

Soient les lignes CD, EF perpendiculaires à AB, je dis qu'elles sont paralleles. Fig. 62.

Car tous les angles qu'elles font avec cette ligne étant droits, l'angle extérieur EFB est égal à son opposé intérieur CDB. Donc les lignes CD & EF sont paralleles *. * N. 132.

THEOREME VI.

Fig 64. 135. *Lorſque deux lignes paralleles AB, CD ſont coupées par une ligne droite EF, les angles intérieurs oppoſés & de différens côtés de la ligne coupante, comme AHG & HGD, de même que BHG & HGC ſont appellés* alternes, *& ces angles ſont toujours égaux entr'eux, c'eſt-à-dire, que AHG eſt égal à HGD & BHG à HGC.*

Il eſt évident que ſi la ligne coupante EF coupe les deux paralleles perpendiculairement, les angles alternes ſont égaux, car alors ils ſont droits: Ainſi dans ce cas la propoſition dont il s'agit, n'a pas beſoin de démonſtration; elle en a ſeulement beſoin lorſque les paralleles ſont coupées obliquement, comme on le ſuppoſe ici.

DEMONSTRATION.

Conſiderez les parties BH & DG des deux paralleles AB, CD comme deux paralleles qui rencontrent la ligne coupante EF; alors on verra que l'angle extérieur EHB eſt égal à ſon oppoſé.

intérieur EGD *: de plus le même angle extérieur eſt auſſi égal à l'angle AHG qui lui eſt oppoſé au ſommet *: Donc les deux angles alternes HGD & AHG ſont égaux au même angle extérieur EHB: Donc ils ſont égaux entr'eux *. * N. 131. * N. 91. * N. 10.

On démontrera de la même maniere que les deux autres angles alternes BHG & HGC ſont pareillement égaux entr'eux.

COROLLAIRE.

Il ſuit de cette propoſition,

136. *Que les deux angles interieurs du même côté BHG & HGD ſont égaux à deux angles droits.*

Car les deux angles de ſuite EHB, BHG ſont égaux à deux angles droits: Mais l'angle EGD eſt égal à EHB. Donc étant ajouté à l'angle GHB il fera la même ſomme que EHB, c'eſt-à-dire, celle de deux angles droits.

THEOREME VII.

137. *Si deux lignes droites qui ſont coupées par une troiſiéme, ont leurs angles alternes égaux, elles ſont paralleles.*

Fig. 64. Soient les deux lignes droites AB, CD coupées par la ligne auſſi droite EF & ſoient les angles alternes égaux AHG & HGD, il faut démontrer que AB ſera parallele à CD.

DEMONSTRATION.

Conſiderez que l'angle EHB étant égal à l'angle AHG qui lui eſt oppoſé au ſommet, il le ſera auſſi à ſon égal HGD. Ainſi l'angle entérieur EHB ſera égal à ſon oppoſé intérieur EGD. Donc HB & GB ſont parallelès. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEMES.

I.

Fig. 65. 138. *D'un point donné C, hors une ligne AB, mener une parallele à cette ligne.*

Mettez une pointe du compas au point donné C, & ouvrez-le enſuite, juſqu'à ce que ſon autre pointe tombe ſur un point D, de la ligne AB; puis du point C pris pour centre, & de l'intervalle CD, décrivez un arc indéfini DF. Prenez après cela le point D pour centre,

& du même intervalle DC, décrivez par C, l'arc CE, jusqu'à la rencontre de AB en E : Faites ensuite l'arc DF, égal à l'arc CE, & par le point C & le point F, tirez la ligne CF, qui sera la parallele demandée.

Pour le démontrer, il faut tirer la ligne CD, & considerer que par la construction, l'angle FCD est égal à l'angle CDB, ou CDE : Or ces angles sont opposés, & de différens côtés de la ligne CD ; donc ils sont alternes*. Donc les lignes AB, CD sont paralleles. *N. 137.

AUTRE RESOLUTION.

139. Du point C, faites tomber la perpendiculaire CD sur AB, & d'un point E pris sur AB à une distance DE prise à volonté du point D, élevez sur AB, EF perpendiculaire & égale à CD ; par C & par F, tirez la ligne FC, elle sera parallele à AB. Ce qui est évident, puisque les perpendiculaires CD, FE, entre ces lignes, sont égales*. Fig. 66. *N. 127.

II.

140. *D'un point donné C sur le terrain, mener une ligne parallele à une ligne AB, aussi tracée sur le terrain.*

Fig. 66. Faites ſur le terrain la même opéra-
*N. 139. tion qu'on vient d'expliquer * pour mener une parallele par un point donné C à une ligne AB donnée ſur le papier.

REMARQUE.

141. Le tracé d'un *Camp*, c'eſt-à-dire, de l'établiſſement à demeure d'une armée en campagne, ne conſiſte que dans celui des paralleles & des perpendiculaires ſur le terrain; c'eſt pourquoi, ceux qui ſe ſeront rendu ces opérations familieres, ne trouveront aucune difficulté à marquer un camp, lorſque les proportions qu'on doit y obſerver, leur ſeront connues: c'eſt ce qu'on peut voir dans la *Caſtrametation* ou *la meſure & le tracé des camps* qu'on a donné au public.

III.

142. *Diviſer une ligne droite AB*
Fig. 67. *en tant de parties égales qu'on voudra, par exemple en 5.*

Il faut tirer la ligne AC qui faſſe avec AB un angle CAB de telle grandeur qu'on voudra, & porter ſur AC, à commencer du point A, une ouverture de compas A 1, priſe auſſi à volonté, au-

tant de fois que AB doit avoir de parties égales, c'eſt-à-dire, dans cet exemple, cinq fois de A en 5. Par le point 5 & le point B, tirez la ligne 5B : Menez enſuite BD qui faſſe avec AB l'angle ABD égal à CAB : Faites après cela BE égale à A5, & portez A1 cinq fois ſur cette ligne de B en E ; tirez enſuite les lignes 4, 1 ; 3, 2 ; 2, 3 ; & 1, 4 ; elles partageront ou diviſeront la ligne AB en cinq parties égales.

IV.

143. *Réſoudre le même problême avec le compas de proportion.*

Le Compas de proportion eſt un Inſtrument, compoſé de deux regles d'argent ou de cuivre, jointes enſemble par un cloud & une charniere, travaillées de maniere qu'elles peuvent tourner autour du cloud comme autour d'un centre.

Entre les différentes lignes qu'on trouve ſur cet inſtrument, qui a un grand nombre d'uſages, il y en a deux AC, AD, le long deſquelles eſt écrit, *les parties égales.* Chacune eſt diviſée en 100, 120, ou 200 parties égales, ſuivant la grandeur de l'inſtrument. Fig. 68.

Pour diviſer une ligne droite, com-

me GH, en plusieurs parties égales; par exemple en 5, on prendra avec le compas ordinaire la longueur de la ligne GH, & ce compas restant ouvert de cet intervalle, on posera une de ses pointes sur un des nombres de la ligne des parties égales qui puisse se diviser exactement en cinq, comme 50, 100, 120, & on prend dans cet exemple le nombre 200 qui est en C. On ouvrira ensuite le compas de proportion, de maniere que l'autre pointe du compas ordinaire tombe sur l'autre regle du compas de proportion, & sur le même nombre de la ligne des parties égales, c'est-à-dire, sur 200 en D, parce que la premiere pointe du compas ordinaire a été posée sur 200. Cela fait, le compas de proportion restant ainsi ouvert, il faut chercher quelle est la cinquiéme partie du nombre qu'on a pris sur la ligne des parties égales, ou quelle est la cinquiéme partie de 200. On trouvera que cette cinquiéme partie est 40. On prendra avec le compas ordinaire l'intervalle de 40 à 40 sur les lignes des parties égales des deux côtés du compas de proportion; ce sera la cinquiéme partie de la ligne proposée GH; ensorte que si on la porte cinq fois sur cette ligne, elle la

diviſera en cinq parties égales.

Si on avoit voulu diviſer la ligne GH en ſept parties égales, il auroit fallu prendre ſur une des lignes des parties égales un nombre qui eût pû être diviſé en ſept parties égales, comme 70, ou 140, & ouvrir enſuite l'inſtrument, de maniere que l'intervalle de 70 à 70, ou de 140 à 140, entre les deux lignes des parties égales, fut égal à la ligne GH; après quoi l'intervalle de la ſeptiéme partie de 70 ou de 140, priſe entre les deux lignes des parties égales des deux branches AC & AD du compas de proportion, auroit donné la ſeptiéme partie de la ligne propoſée GH.

Si la ligne propoſée ſe trouve trop grande pour pouvoir être priſe avec le compas ordinaire, & portée enſuite ſur le compas de proportion: Il faudra la partager en pluſieurs parties à volonté, & prendre la cinquiéme partie de chacune, ſi on veut la diviſer en cinq parties; la ſeptiéme, ſi on veut la diviſer en ſept parties, &c. il eſt clair que la ſomme de toutes les cinquiémes ou des ſeptiémes parties des lignes dans leſquelles on a d'abord partagé la ligne donnée, donnera la cinquiéme ou la ſeptiéme partie de cette même ligne.

On trouvera la démonſtration de cet uſage & du problême qui le précéde dans le ſecond volume de *l'Arithmetique & la Géométrie de l'Officier.*

VII.

Des Tangentes, ou des lignes qui touchent le cercle & des lignes tirées dans le cercle.

Fig. 69. 144. LEs lignes, comme AB, qui touchent le cercle ſans le couper, ſe nomment *Tangentes.*

La circonférence du cercle, & en general toutes les autres lignes courbes peuvent être conçues comme compoſées d'une infinité de lignes droites infiniment petites, qui font enſemble des angles qui different de 180 degrés d'une quantité auſſi infiniment petite. Dans cette ſuppoſition, la tangente eſt le prolongement d'une de ces petites lignes; autrement ſi on conçoit la courbe comme compoſée de points, la tangente eſt une ligne qui paſſe par un de ces points.

145. Il ſuit de-là, que la tangente ne touche le cercle que dans la partie

infiniment petite de la circonférence dont elle eſt le prolongement, ou, ce qui eſt la même choſe, dans un point de cette circonférence.

THEOREME I.

146. *Si l'on mene une perpendiculaire AB à l'extrémité d'un rayon AC, elle ne touchera la circonférence du cercle X que dans le ſeul point A, c'eſt-à-dire, qu'elle ſera tangente au cercle.* Fig. 69.

Pour le démontrer, conſidérez que le rayon CA étant perpendiculaire ſur AB eſt la ligne la plus courte qu'on puiſſe tirer de C ſur AB; car ſi on tire une autre ligne comme CD du point C à un point quelconque D de la ligne AB, elle ſera plus grande que le rayon CA étant oblique à AB: Donc le point D ſera hors du cercle, & comme on démontrera la même choſe de tous les autres points de la ligne AB, il s'enſuit qu'il ne touche le cercle que dans le ſeul point A, c'eſt-à-dire, qu'elle eſt tangente. C. q. f. d.

COROLLAIRE.

147. Il ſuit de cette propoſition que

la tangente eſt perpendiculaire au rayon ; & qu'ainſi ſi du point A où touche la circonférence d'un cercle X, on tire le rayon CA, qu'il ſera perpendiculaire ſur la tangente, ou qu'il fera un angle droit avec elle.

THEOREME II.

148. *Si du point A où une tangente touche le cercle, on éleve une perpendiculaire, elle paſſera par le centre C du cercle.*

Fig. 70. Pour le démontrer, conſiderez que par le corollaire précédent, la ligne tirée de C au point touchant A, eſt perpendiculaire ſur AB : Or, ſi de A on pouvoit tirer une autre perpendiculaire, comme AE, qui ne paſſât pas par le centre C du cercle, il s'en-ſuivroit que du même point on pourroit élever deux perpendiculaires ſur AB : Mais on *N. 110. a vû * que cela étoit impoſſible : Donc la perpendiculaire AC élevée du point touchant A de la tangente, paſſe par le centre C du cercle. C. q. f. d.

THEOREME III.

Fig. 71. 149. *Si un diamétre EF coupe une*

corde AB perpendiculairement en M, il la coupera en deux également, de même que les deux arcs que soutient la corde AB.

Pour le démontrer, considerez que le point C, centre du cercle, est à égale distance des extrémités A & B de la corde AB, & que comme le diamétre EF coupe la corde perpendiculairement, tous ses autres points sont également distans de A & de B *. Donc le point M dans lequel il coupe AB est au milieu de cette ligne : Donc les points E & F sont aussi également distans de A & de B : Donc les arcs AEB & AFB sont coupés en deux également en E & en F. C. q. f. d. * N. 111.

REMARQUE.

150. Il est évident, que si au lieu d'un diamétre, on tire du centre une perpendiculaire sur une corde, qu'elle coupera cette corde en deux également, de même que l'arc qu'elle soutient.

La démonstration est la même que celle du précédent Théorême.

THEOREME IV.

151. *Si un diamétre EF coupe une*

corde AB en deux également en M, il la coupera perpendiculairement, & il coupera auſſi en deux également les arcs que ſoutient cette corde.

Cette propoſition eſt la converſe de la précédente. Elle ſe démontre, en conſidérant que le point C, centre du cercle, eſt également diſtant de A & de B, & que par la ſuppoſition, le point M eſt auſſi également diſtant de A & de B; d'où il ſuit *, que la ligne EF a tous ſes points également éloignés de A & de B; qu'ainſi elle eſt perpendiculaire à AB, & qu'elle coupe en deux parties égales les deux arcs dont cette ligne eſt la courbe. C. q. f. d.

* N. 112.

THEOREME V.

Fig. 72. 152. *Si deux cordes AB, & DE dans un cercle, ſont également éloignées du centre C de ce cercle, elles ſeront égales; & ſi elles ſont égales, elles ſeront également éloignées du centre.*

Soit dans le cercle X, les cordes AB & DE également éloignées du centre C de ce cercle, il faut démontrer qu'elles ſont égales.

Soit tiré du centre C ſur les cordes AB & DE les perpendiculaires CF & CG qui ſeront égales par la ſuppoſition, & de même les rayons CB & CD & qui couperont AB & DE en deux parties égales. Cela fait, imaginez que le cercle X ſoit ployé de maniere que CF tombe ſur CG enſorte que F ſoit ſur F, alors FB tombera ſur GD, à cauſe des angles droits CGD, CFB. Mais les points B & D étant également diſtans de C, tomberont l'un ſur l'autre en D : Donc GD ſera égale à FB *: Donc, puiſque les moitiés de ces cordes ſont égales, les cordes le ſont auſſi : Donc les cordes également éloignées du centre, ſont égales. C. q. f. d. *N. 150.

On démontrera de la même maniere la ſeconde partie de la propoſition, laquelle ſeconde propoſition eſt la converſe de la premiere.

On démontrera auſſi pareillement la propoſition ſuivante ; ſçavoir,

153. *Que dans un cercle, ou dans des cercles égaux, la plus grande corde eſt la plus proche du centre, & que réciproquement la corde la plus proche du centre eſt la plus grande.*

VIII.

Des angles, dont le ſommet eſt à la circonférence du cercle.

154. ON a vû que la meſure de l'angle eſt l'arc décrit entre ſes côtés de ſon ſommet pris pour centre; alors le ſommet de l'angle eſt au centre de l'arc, par lequel il eſt meſuré: Mais lorſque les angles ont leur ſommet placé ſur la circonférence du cercle, il s'agit de les meſurer par le moyen de l'arc de cette circonférence intercepté entre les côtés de l'angle, c'eſt l'objet de cet article.

155. Les angles qui ont leur ſommet à la circonférence d'un cercle peuvent être formés d'une tangente, & d'une corde comme l'angle ABC, ou de deux cordes, comme CBD. Nous allons d'abord déterminer quelle eſt la meſure du premier, & nous en déduirons celle du ſecond. Fig. 73.

THEOREME I.

156. *Tout angle, comme ABC, formé*

mé d'une tangente AB, & d'une corde BC, a pour mesure la moitié de l'arc BFC que soutient cette corde.

DEMONSTRATION.

Du centre D, tirez au point touchant B, le rayon BD qui fera un angle droit avec BA * & DE perpendiculaire sur BC, qui coupera cette corde en deux également en E *, & l'arc BFC aussi en deux également en F, étant prolongée jusqu'à cet arc ; ainsi BF en sera la moitié. Par D, menez encore GDH parallele à BC. Fig. 74.

Cette préparation étant faite, considerez que l'angle BDF qui a son sommet en D, a pour mesure l'arc BF, compris entre ses côtés * ; & que comme l'objet de cette proposition est de faire voir que l'angle ABC a aussi pour mesure ce même arc BF, il faut démontrer que cet angle est égal à BDF.

Pour cela, remarquez que l'angle GDF est droit * de même que DBA ; qu'à cause des paralleles GH & BC les angles GDB & DBE sont égaux étant alternes * ; d'où il suit, que si des deux angles droits GDF & DBA on retranche les angles égaux GDB & DBE, il

* N. 147.
* N. 150.
* N. 76.
* N. 134.
* N. 139.

reſtera du premier l'angle BDF égal à
*N. 8. l'angle ABE ou ABC du ſecond * : Donc l'angle formé d'une tangente & d'une corde, a pour meſure la moitié de l'arc que ſoutient la corde. C. q. f. d.

THEOREME II.

157. *Tout angle, comme ABC, qui a ſon ſommet à la circonférence du cercle, & qui eſt formé par deux cordes quelconques BA & BC, a pour meſure la moitié de l'arc AC, compris entre ſes côtés, ou ſur lequel il s'appuye.*

DEMONSTRATION.

Fig. 75. Soit DE une tangente qui paſſe par le ſommet B de l'angle ABC, on aura les trois angles de ſuite EBC, CBA,
*N. 89. & DBA égaux à deux angles droits *, c'eſt-à-dire, qu'ils auront pour meſure la moitié de la circonférence entiere : Mais par la propoſition précédente, les angles EBC, DBA ont chacun pour meſure la moitié des arcs BGC & BFA. Or, ces deux arcs étant retranchés de la circonférence entiere, il ne reſte plus que l'arc AHC ; l'angle ABC en doit donc avoir la moitié pour meſure : Mais

cet arc eſt celui ſur lequel il s'appuye : Donc l'angle qui a ſon ſommet à la circonférence, a pour meſure la moitié de l'arc ſur lequel il s'appuye. C. q. f. d.

COROLLAIRES.

I.

158. Il ſuit de-là, *qu'un angle dont le ſommet eſt au centre, comme BCD, eſt double de celui qui a ſon ſommet à la circonférence, comme BAD, & qui s'appuye ſur le même arc BD.* Fig. 76.

Car le premier a pour meſure l'arc entier BD, & l'autre n'en a que la moitié.

II.

159. *Que les angles, comme ABC, ADC qui ont leur ſommet B & D à la circonference du cercle, & qui s'appuyent ſur le même arc AC, ou ſur des arcs égaux, ſont égaux.* Fig. 77.

Car ils ont chacun pour meſure la moitié du même arc AC.

III.

160. *Qu'un angle ABC qui a ſon* Fig. 78.

ſommet B à la circonference du cercle, & qui s'appuye ſur un diamétre AC, eſt droit.

Car il a pour meſure la moitié de la demi-circonférence, c'eſt-à-dire, 90 degrés.

I V.

Fig. 78. 161. *Que l'angle ABE qui s'appuye ſur un arc AE moindre que la demi-circonference, eſt aigu.*

V.

162. *Que l'angle CDH qui a ſon ſommet en D, & qui s'appuye ſur l'arc CEAH, plus grand que la demi-circonference, eſt obtus.*

PROBLEMES.

I.

163. *D'un point donné A, à l'extrémité d'une ligne AB, élever une perpendiculaire ſans prolonger la ligne.*

Fig. 79. Choiſiſſez un point C à volonté hors de la ligne AB, lequel étant pris pour centre, & décrivant de ce point &

l'intervalle CA un arc indéfini, cet arc coupe AB dans un point D. Tirez ensuite par D & par C la ligne DC, prolongée jusqu'à la circonference en E; tirez après cela EA, elle sera perpendiculaire sur AB.

Pour le démontrer, considerez que l'angle EAD a son sommet à la circonference du cercle, & qu'il s'appuye sur un diamétre ED; qu'ainsi il est droit *, & par conséquent que EA est perpendiculaire à AB. *N. 106.

II.

164. *D'un point donné A, sur la circonference d'un cercle, lui mener une tangente.* Fig. 80.

Il faut tirer le rayon CA, & élever du point A sur CA, la perpendiculaire AB, elle sera la tangente demandée *. *N. 147.

III.

165. *D'un point donné B, hors la circonference d'un cercle X, lui mener une tangente AB.* Fig. 81.

Tirez du centre C au point B, la ligne CB; & du point D, milieu de cette

ligne, & de l'intervalle de ſa moitié DC ou DB, décrivez un cercle Y, qui coupe la circonférence du cercle X en un point quelconque A; par ce point, & par le donné B, menez la ligne AB; elle ſera tangente au cercle X, ou, ce qui eſt la même choſe, perpendiculaire à ſon rayon.

Pour le démontrer, tirez CA, l'angle CAB eſt droit, puiſqu'il a ſon ſommet en A dans la circonference du cercle Y, & qu'il s'appuye ſur ſon diamétre CB *: Donc AB eſt perpendiculaire à AC; Mais AC eſt le rayon du cercle X. Donc, &c.

*N. 160.

REMARQUE.

On ajoutera ici une maniere de mener une parallele à une ligne donnée, qui eſt fort uſitée dans la pratique des fortifications, & qu'on n'a pû donner plûtôt, parce que ſa démonſtration dépend de la proprieté de la tangente.

Fig. 82. 166. Soit la ligne AB à laquelle on veut mener une parallele, qui en ſoit éloignée d'une grandeur auſſi donnée CK.

Prenez ſur AB deux points C & E vers les extrémités de cette ligne; enſuite de chacun de ces points pris pour centre & de l'intervalle CK, décrivez deux

arcs indéfinis MN, OP ; tirez la ligne FH qui touche ces arcs ſans les couper, elle ſera parallele à AB.

Car tirant des centres C & E les lignes CK, & EL aux points K & L, dans leſquels la ligne FH touche les arcs MN, OP, ces lignes CK & EL ſeront perpendiculaires ſur la tangente FH *. Mais elles ſont égales par la conſtruction : Donc les lignes AB & FH qui ont entr'elles des perpendiculaires égales, ſont paralleles *. *N. 147. *N. 127.

IX.

Des Triangles.

ON a déja dit qu'une figure étoit un eſpace terminé de tous côtés par des lignes.

167. Une figure plane (& c'eſt de cette ſeule eſpece dont il s'agit ici) terminée par des lignes droites, ſe nomme *figure rectiligne* ; *curviligne*, ſi elle eſt bornée de lignes courbes ; & *mixtiligne*, ſi ce ſont des lignes droites & des lignes courbes qui la terminent.

168. Dans la Géométrie ordinaire,

on ne considere aucune figure curviligne ou mixtiligne, si ce n'est le cercle ou des parties de cercle.

169. Parmi les figures, les plus simples sont les *triangles*.

Fig. 83. 170. Le triangle est une figure terminée par trois côtés, comme la figure ABC, qui est terminée par les côtés AB, BC, & CA.

171. Les triangles prennent différens noms, suivant qu'ils sont considerés par rapport à leurs côtés, ou par rapport à leurs angles.

Fig. 84. & 85. 172. Par rapport aux côtés, celui qui a ses trois côtés égaux, comme ABC, se nomme *équilateral*: celui qui n'a que deux côtés égaux, comme DEF, dans lequel DF est égal à FE, se nomme *isoscele*: & enfin celui qui a ses trois côtés inégaux est appellé *scalene*.

Fig. 86. 173. Par rapport aux angles, le triangle qui a un angle droit, comme GHI, dans lequel l'angle GHI est supposé droit, est appellé *triangle rectangle*, & le côté GI opposé à l'angle droit, se nomme *hypotenuse*. Le triangle qui a un angle obtus est appellé *obtusangle*, comme LMN, & enfin celui qui a ses trois angles aigus est appellé *acutangle*.

Fig. 87. 174. La *base* d'un triangle est un de

de ſes côtés, pris à volonté, comme MN dans le triangle LMN, & alors le ſommet L de l'angle MLN oppoſé à la baſe, ſe nomme le ſommet du triangle. Si on avoit pris LM pour la baſe de ce triangle, le point N en auroit été le ſommet.

175. La hauteur d'un triangle eſt une perpendiculaire LP abbaiſſée du ſommet L ſur la baſe MN, prolongée lorſqu'il en eſt beſoin.

THEOREME I.

176. *Dans tout triangle, deux côtés pris enſemble, ſont toujours plus grands que le troiſiéme.*

Cette propoſition eſt évidente; car il eſt clair, par exemple dans le triangle LMN, que les deux côtés LM, & MN qui ſont une ligne courbée LMN, ſont plus grands que la droite LN *. Fig. 87. * N. 26.

THEOREME II.

177. *Les trois angles de tout triangle ſont égaux, pris enſemble, à deux angles droits.*

DEMONSTRATION.

Soit le triangle ACB dans lequel on Fig. 88.

veut prouver que ſes trois angles A, C B ſont égaux à deux angles droits, ou à cent quatre-vingt degrés. Prenant AB pour baſe, ſoit mené par le ſommet C la ligne DE parallele à AB. Cette ligne fait trois angles de ſuite DCA, ACB & BCE avec les deux côtés CA & CB du triangle, qui ſont par conſéquent égaux à deux angles droits *; ainſi, ſi on démontre que les trois angles du triangle ACB ſont égaux à ces trois angles de ſuite, on aura démontré qu'ils valent deux angles droits.

*N. 89.

A cauſe de la parallele DE, l'angle DCA eſt égal à ſon alterne CAB *; l'angle ACB qui eſt l'angle du ſommet du triangle eſt égal à lui-même; & le troiſiéme angle de ſuite ECB eſt auſſi égal à ſon alterne CBA: Donc les trois angles du triangle ABC, ſont égaux à deux angles droits. Il eſt évident qu'on peut démontrer la même choſe de tout autre triangle: Donc, &c.

*N. 135.

COROLLAIRES.

I.

Il ſuit de cette propoſition,

178. *Que lorſqu'on connoît deux angles dans un triangle, on peut ſçavoir*

quelle eſt la valeur du troiſiéme.

Car ſi on ſuppoſe dans le triangle ACB que l'angle CAB ſoit de 50 degrés, & l'angle ABC de 60, ajoutant enſemble ces deux angles, leur ſomme ſera 110 degrés, qui étant ôtés de 180, valeur des trois angles du triangle, il reſtera 70 degrés pour celle du troiſiéme angle ACB.

II.

179. *Que lorſqu'un triangle eſt rectangle, ſi l'on connoît l'un de ſes deux angles aigus, on connoîtra auſſi l'autre.*

Car les deux aigus ne valent enſemble qu'un droit; ainſi de 90 degrés ôtant l'angle aigu connu, le reſte ſera la valeur de l'inconnu.

III.

180. *Qu'un triangle ne peut avoir enſemble un angle droit & un obtus, mais ſeulement l'un ou l'autre.*

THEOREME III.

181. *Si l'on prolonge un côté quelconque AC d'un triangle ABC, l'angle* Fig. 88.

extérieur BCD ſera égal aux deux oppoſés intérieurs A & B.

DEMONSTRATION.

On a vû dans la propoſition précé-
*N. 177. dente * que les trois angles de tout triangle valent deux angles droits : Ainſi, les deux angles A & B joints avec l'angle ACB valent cent quatre-vingt degrés ; mais l'angle extérieur BCD, joint auſſi avec l'angle ACB, qui eſt ſon ſupplément, vaut pareillement deux angles droits : Donc il eſt égal aux deux angles A & B pris enſemble, puiſqu'en lui ajoutant le même angle ACB, il forme une
* N. 9. ſomme égale à celle de ces * deux angles joints au même angle. C. q. f. d.

THEOREME IV.

182. *Dans tout triangle les angles dépendent des côtés qui leur ſont oppoſés, & reciproquement les côtés dépendent des angles. C'eſt-à-dire, que ſi le triangle eſt équilateral, ſes trois angles ſont égaux entr'eux ; que s'il eſt iſoſcelle il a deux angles égaux, & que ſi ſes trois angles ſont égaux il eſt équilateral, & iſoſcelle s'il n'a que deux angles égaux.*

Soit le triangle équilateral ABC, il faut démontrer que ſes trois angles ſont égaux.

DEMONSTRATION.

Faites paſſer par le problême du n. 62 la circonférence d'un cercle par le ſommet des angles de ABC; conſiderez enſuite que les côtés de ce triangle ſont les cordes des arcs qu'ils ſoutiennent, & que comme ils ſont égaux, les arcs le ſont auſſi *. Or chaque angle de ABC a pour meſure la moitié de l'arc ſur lequel il s'appuye *, c'eſt-à-dire, la moitié d'arcs égaux. Donc ils ſont égaux. Donc le triangle équilateral à ſes trois angles égaux. C. q. f. d. Fig. 89. * N. 56. *N. 157.

On demontrera de la même maniere que le triangle iſoſcelle a deux angles égaux.

Car ayant fait paſſer la circonférence d'un cercle par les trois angles de ce triangle, on n'aura que les deux arcs ſoutenus par les côtés égaux qui ſeront égaux: or les angles oppoſés à ces côtés auront chacun pour meſure la moitié de ces arcs *. Donc ils ſeront égaux. Donc, &c. *N. 157.

Pour démontrer preſentement, que ſi les trois angles du triangle ACB ſont Fig. 89.

égaux, il ſera équilateral.

Il faut encore faire paſſer la circonférence d'un cercle par le ſommet de ces angles, & conſiderer que les côtés du triangle diviſeront cette circonférence en trois parties égales entr'elles. Car les angles du triangle ACB ont chacun pour meſure la moitié d'une des parties ſur leſquelles ils s'appuyent, mais comme ils ſont égaux par la ſuppoſition, il faut que ces moitiés ſoient égales, & par conſéquent que les arcs entiers le ſoient auſſi également; les côtés du triangle ſont les cordes de ces arcs, mais dans le même cercle les arcs égaux ſont ſoutenus par des cordes égales *. Donc les trois côtés du triangle ſont égaux. Donc le triangle qui a ſes angles égaux eſt équilateral. C. q. f. d.

* N. 50.

Il eſt évident par cette même démonſtration, que le triangle qui a deux angles égaux, a auſſi deux côtés égaux ou qu'il eſt iſoſcelle.

COROLLAIRE I.

Il ſuit du précédent theorême,

183. 1°. Que chaque angle du triangle équilateral vaut 60 degrés. Car comme ils valent tous les trois enſemble 180

degrés, & qu'ils sont égaux entr'eux; chacun en vaut le tiers, c'est-à-dire 60.

COROLLAIRE II.

184. 2°. Que le triangle isoscelle a deux angles égaux, & reciproquement que celui qui a deux angles égaux a aussi deux côtés égaux ou qu'il est isoscelle.

THEOREME V.

185. *Dans tout triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle, & réciproquement au plus grand angle est opposé le plus grand côté.*

Soit le triangle ABC, dont CB soit le plus grand côté, il faut démontrer que l'angle CAB qui lui est opposé, est le plus grand angle du triangle. Fig. 90.

Puisque CB est plus grand que CA, soit pris sur CB, la partie CD égale à CA, & soit tiré AD. On aura alors le triangle isoscelle CAD, dont les angles CAD & CDA seront égaux *: Or CDA est l'angle extérieur du triangle ABD: Donc il est plus grand que l'angle B*: Donc l'angle CAD est aussi plus grand que ce même angle B, & à *N. 184. *N. 181.

plus forte raiſon l'angle CAB qui eſt plus grand que l'angle CAD : Donc l'angle CAB oppoſé au grand côté CB, eſt plus grand que l'angle CBA oppoſé au côté CA.

On démontrera de la même maniere, que l'angle CAB eſt plus grand que l'angle C oppoſé à AB.

Pour la ſeconde partie de la propoſition, qui conſiſte à démontrer que ſi l'angle CAB eſt le plus grand angle du triangle CBA, le côté CB oppoſé à cet angle, ſera plus grand que chacun des autres côtés du même triangle, il faut tirer la ligne AD qui faſſe avec AC l'angle CAD égal à l'angle DCA. On aura alors le triangle iſoſcelle ADC qui donnera DC égale à AD *, & la ligne courbée ADB égale à la droite BC ; mais cette ligne courbée eſt plus grande que la droite AB * : Donc CB eſt auſſi plus grande que cette même ligne : Donc, &c.

*N. 184.

*N. 17.

On démontrera de la même maniere que CB eſt plus grand que CA.

Il ſuit de cette propoſition,

186. Que dans les triangles égaux les côtés égaux ſont oppoſés aux angles égaux, & que les côtés qui ſont oppoſés aux angles égaux ſont égaux.

THEOREME VI.

187. *Si l'on a un triangle équilateral ABC, & qu'on prolonge un de ſes côtés BC en D, faiſant BD égal à BC, qu'on tire enſuite DA, cette ligne ſera perpendiculaire ſur AC.*

DEMONSTRATION.

L'angle extérieur ABD du triangle ABC vaut 120 degrés, puiſqu'il eſt égal aux deux oppoſés intérieurs A & C de ce triangle, qui valent chacun 60 degrés *: Or, le triangle DBA eſt iſoſcele, car DB eſt égal à BC, ou à AB: Donc ces deux angles D & DAB, qui valent enſemble 60 degrés, étant le ſupplement de 120, valent chacun 30 degrés: Ainſi, l'angle DAC eſt compoſé de deux angles CAB & BAD, dont le premier vaut 60 degrés, & le ſecond 30. Donc cet angle vaut 90 degrés: Donc, &c. Fig. 91. *N 183.

On peut tirer de cette propoſition un moyen facile d'élever une perpendiculaire à l'extrémité d'une ligne.

Suppoſant que A ſoit l'extrémité d'une ligne droite AC, ſur laquelle on veut

élever une perpendiculaire. On prendra ſur cette ligne une partie quelconque AC, ſur laquelle on décrira un triangle équilateral, & prolongeant vers D le côté CB de ce triangle oppoſé à A, & faiſant BD égale à CB; ſi l'on tire DA, elle ſera perpendiculaire ſur l'extrémité A de la ligne propoſée. Ce qui eſt évident par le précédent Théorême.

De l'égalité des triangles.

188. L'idée la plus ordinaire que l'on a de l'égalité des Figures, c'eſt que ſi on les poſe les unes ſur les autres, elles peuvent ſe couvrir exactement ſans ſe déborder d'aucun côté. En nous ſervant de cette idée nous ferons voir que les triangles ſeront égaux, lorſqu'en les imaginant poſés les uns ſur les autres, d'une certaine maniere, il s'enſuivra qu'ils ſe couvriront exactement, c'eſt-à-dire, que les trois côtés des uns couvriront exactement les trois côtés des autres. Cette façon de démontrer, s'appelle *ſuperpoſition.*

REMARQUE.

189. Dans tout triangle, il y a ſix

choſes à conſiderer ; ſçavoir, trois côtés & trois angles ; mais comme deux angles d'un triangle déterminent le troiſiéme *, ces ſix choſes peuvent ſe réduire à cinq, qui ſont donc trois côtés & deux angles. *N. 178.

Nous allons démontrer dans les propoſitions ſuivantes, que trois de ces cinq choſes ſuffiſent pour déterminer le triangle, ou ſi l'on veut pour le conſtruire ; enſorte, que par leur moyen on pourra venir à la connoiſſance des deux autres. *Qu'ainſi les triangles qui auront chacun trois choſes égales des cinq qui les déterminent* ; ſçavoir, *ou les trois côtés, ou deux côtés & l'angle formé par ces côtés ; ou un côté & deux angles, ſeront égaux entr'eux.*

THEOREME VII.

190. *Si un triangle ABC a ſes trois côtés égaux, chacun à chacun, aux trois côtés d'une autre triangle* abc, *le premier aura auſſi ſes trois angles égaux, chacun à chacun, à ceux du ſecond, & il lui ſera entiérement égal.*

DEMONSTRATION.

Mettez par la penſée les trois côtés Fig. 92.

du premier ſur les trois côtés du ſecond, chacun ſur chacun, de maniere que leurs extrémités tombent les unes ſur les autres, ce qui peut ſe faire, puiſque ces côtés ſont égaux entr'eux; alors le premier triangle ABC couvrira exactement le ſecond; ainſi leurs angles ſeront les mêmes: Donc ces deux triangles ſeront entiérement égaux: Donc, &c.

REMARQUE.

191. On peut, pour rendre cette démonſtration encore plus complette, démontrer qu'en portant le triangle ABC ſur *abc*, ſes deux côtés CA & CB ne peuvent tomber que ſur les côtés *ca* & *cb* de ce triangle.

Pour cela, il faut du point *a*, pris pour centre, & de l'intervalle AC, décrire un arc qui aura tous ſes points éloignés de *a* de la diſtance AC: Enſuidu point *b*, pris auſſi pour centre, & de l'intervalle BC, décrire de même un ſecond arc qui aura tous ſes points éloignés de *b* de l'intervalle BC. Ces deux arcs ſe couperont dans un point *c*, qui eſt le ſeul duquel on puiſſe tirer deux lignes égales aux deux rayons CA & CB égaux à *ac* & *bc*. Donc en mettant le

triangle ABC sur *abc*, ses deux côtés CA & CB ne peuvent se réunir que dans le point *c* du triangle *abc*; & comme on peut démontrer la même chose des côtés BA & BC, & CA & AB du triangle ACB, il s'ensuit qu'en le posant sur *abc*, comme on l'a enseigné, il faut nécessairement qu'ils se couvrent mutuellement, & que les angles de ces triangles soient égaux entr'eux, chacun à chacun. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME VIII.

192. *Si les deux côtés CA & CB d'un triangle ACB, sont égaux aux deux côtés* ca, cb *d'un autre triangle* acb; *que de plus, l'angle ACB compris par les deux côtés du premier, soit égal à l'angle* acb *compris par les deux côtés du second, le premier sera égal au second.*

DEMONSTRATION.

Portez le premier triangle ACB sur le second, de façon que le côté AC couvre exactement *ac*; alors à cause de l'égalité des angles ACB, *acb*, CB tombera sur *cb*, & comme ces deux côtés sont égaux, le point B tombera sur Fig. 91

le point *b*. Donc la base AB du premier triangle couvrira la base *a b* du second ; Donc ces deux triangles se couvriront exactement : Donc ils sont égaux : Donc, &c.

THEOREME IX.

193. *Si la base AB d'un triangle ACB est égale à la base* a b *d'un autre triangle* a c b, *& que les angles A & B sur la base du premier soient égaux, chacun à chacun, aux angles* a *&* b *sur la base du second, le premier triangle sera égal au second.*

DEMONSTRATION.

Fig. 94. Portez le premier triangle ACB sur le second, de maniere que AB couvre exactement *a b* ; alors à cause de l'égalité des angles de la base, les côtés AC & BC de ce triangle tomberont sur les côtés *a c* & *b c* de l'autre triangle : Donc ils se rencontreront dans le même point *c* : Donc ils se couvriront exactement : Donc ils seront égaux. C. q. f. d.

PROBLEMES.

I.

194. *Sur une ligne donnée AB, décrire un triangle equilateral.*

Prenez les points A & B pour centre, & de l'intervalle de AB, décrivez deux arcs qui ſe coupent dans un point C, duquel tirez les lignes CA & CB, & vous aurez le triangle équilateral demandé ACB. Fig. 95.

Pour le démontrer, conſiderez que les lignes CA & CB ſont chacunes égales au rayon des arcs qui ſe coupent en C, & que par la conſtruction, ce rayon eſt égal à AB; qu'ainſi les trois côtés du triangle ABC ſont chacun égaux à AB, & que par conſéquent il eſt équilateral.

II.

195. *Faire un triangle qui ait pour côtés trois lignes données A, B & C, dont deux priſes enſemble, ſont plus grandes que la troiſiéme.* Fig. 96.

RESOLUTION.

Prenez une des lignes données A

pour baſe du triangle; d'une de ſes extrémités E priſe pour centre, & de l'intervalle de la ligne B, décrivez un arc vers D; de ſon autre extrémité F, & de l'intervalle de la troiſiéme ligne donnée C, décrivez un arc qui coupe le premier en D; duquel point, tirez les lignes DE & DF pour avoir le triangle FDE, qui aura ſes côtés égaux aux trois lignes données A, B, & C.

La démonſtration en eſt évidente par la conſtruction.

III.

Fig. 97. 196. *Faire un triangle qui ait pour baſe une ligne égale à une ligne donnée AB, & les angles ſur cette baſe égaux à deux angles donnés* a *&* b, *moindres que deux droits.*

RESOLUTION.

Tirez la ligne FG égale à la ligne AB & faites au point F l'angle GFH égal à l'angle *a*, & au point G, l'angle FGH égal à l'angle *b*; prolongez les deux côtés de ces angles, juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent dans un point H: alors le triangle FGH ſera le triangle demandé.

REMARQUE.

REMARQUE.

Si les angles *a* & *b* étoient donnés en degrés, il faudroit faire sur FG aux points F & G des angles, avec le rapporteur, de la quantité des degrés de *a* & de *b*.

Usages qu'on peut faire des triangles pour mesurer les lignes accessibles par leurs extrémités seulement, ou entièrement inaccessibles, &c.

197. On appelle *Trigonométrie* la partie de la Géométrie qui traite des mesures des triangles, & qui par la connoissance des trois choses qui les déterminent, fait parvenir à connoître les côtés ou les angles inconnus.

On peut résoudre les problêmes de la trigonométrie par le calcul, ou sans calcul. La premiere méthode est plus exacte que l'autre, & on la trouvera dans *l'Arithmetique & la Géométrie de l'Officier*; on ne la donne point dans cet abregé, parce qu'elle suppose plusieurs propositions dont on n'a pas dessein de parler. On résoudra donc ici les problêmes suivans, sans calcul; ils serviront à

donner une idée de la fécondité des principes déja établis, & de l'application qu'on en peut faire ; mais auparavant il faut définir les différentes sortes de lignes qu'on peut avoir à mesurer sur le terrain.

198. On appelle lignes *horisontales* des lignes couchées sur le terrain, ou paralleles à sa surface, parce que dans cette situation, elles le sont aussi à un grand cercle, appellé *horison*, lequel est imaginé passer par le centre de la terre, & la diviser en deux également ; sçavoir, en partie supérieure, & en partie inférieure.

199. On appelle lignes *verticales* ou *perpendiculaires à l'horison*, des lignes droites qui ne panchent d'aucun côté sur le terrain, c'est-à-dire, qui font des angles droits avec toutes les lignes horisontales qui passent par le point où elles sont élevées sur le terrain.

200. Une *ligne oblique* ou *inclinée à l'horison*, est une ligne qui panche sur le terrain plus d'un côté que d'un autre ; telle est une ligne droite, tirée du sommet d'une montagne à son pied.

201. On appelle aussi *figures horisontales* celles qui sont formées de lignes horisontales ou tracées sur le terrain ; & enfin *figures verticales*, celles qui sont

élevées perpendiculairement au terrain.

PROBLEME I.

202. *Trouver la largeur AB d'un étang, ou, ce qui eſt la même choſe, la longueur d'une ligne AB acceſſible ſeulement par ſes extrémités A & B.* Fig. 90.

On fera planter deux piquets ou jalons aux points A & B ; enſuite ſi la campagne eſt libre, comme on le ſuppoſe ici, on choiſira un point C à volonté, duquel on puiſſe voir les piquets A & B, & y aller ſans obſtacle.

On plantera auſſi un piquet en C, & on s'éloignera de ce point, ſuivant le prolongement de CB ; on plantera pluſieurs piquets dans l'alignement de C & de B : on prolongera de même avec des piquets, le côté AC, & l'on meſurera enſuite CB & CA pour faire CE égale à CB, & CD égale à AC ; cela fait, on tirera ED, elle ſera égale à la ligne AB.

Pour le démontrer, conſiderez que les deux côtés CE & CD du triangle ECD ſont égaux, par la conſtruction, aux deux côtés AC & CB de ACB ; de plus, que l'angle ECD formé par les

deux côtés du premier eſt égal à l'angle ACB formé par les deux du ſecond, puiſque ces angles ſont oppoſés au ſommet : Donc les deux triangles ECD, ACB ſont égaux * : Donc les lignes ED & AB, ſont égales. C. q. f. d.

*N. 192.

203. Si la campagne ſe trouve trop inégale ou trop reſſerrée pour permettre de s'étendre, comme on vient de le faire au-delà de AB, on peut meſurer le triangle ACB, & le conſtruire dans un autre endroit du terrain où l'on puiſſe aller le long de AB.

Pour cela, il faut meſurer ſes deux côtés AC & CB, & l'angle ACB que ces côtés font enſemble. C'eſt tout ce que l'on a beſoin pour la conſtruction de ce triangle.

Car il n'y a qu'à choiſir un terrain commode ſur lequel on prenne GH égale au nombre de toiſes de AB, faire avec le Graphométre, l'angle GHL égal à ACB, & le côté HL égal à CB : il eſt évident que le triangle GHL ſera égal au triangle ACB *, & que GL ſera par conſéquent égale à la ligne AB que l'on vouloit connoître.

Fig. 99.

*N. 198.

Comme la conſtruction ſur le terrain d'un nouveau triangle égal à ACB, peut devenir embaraſſante dans pluſieurs cas,

voici un moyen de l'éviter, en rapportant ce triangle sur le papier par le moyen d'une *échelle* & du rapporteur.

De l'échelle d'un plan ou d'une figure.

204. Il est évident que lorsque l'on construit sur le papier une figure prise ou tracée sur le terrain, il faut nécessairement qu'elle occupe moins d'espace sur le papier que sur le terrain, & cependant qu'elle serve à faire connoître la grandeur de toutes les parties de l'objet qu'elle doit representer: C'est pour cela que lorsqu'il faut rapporter du terrain sur le papier une figure quelconque, on commence, pour ainsi dire, par racourcir ou diminuer la mesure du terrain. Je veux dire, que si toutes les parties de la figure du terrain sont exprimées en toises & en piés, on commence par déterminer une longueur arbitraire pour représenter sur le papier la longueur de la toise du terrain, & cette longueur se proportionne à la grandeur qu'on veut donner à la figure, relativement au papier sur lequel on doit la représenter ou dessiner.

Ainsi on peut prendre un pouce pour représenter 100 toises ou 50 toises du terrain, &c. Si l'on a pris un pouce

pour 50 toiſes, une longueur de trois pouces donnera 150 toiſes, de quatre, 200, &c. C'eſt cette longueur, ainſi déterminée, pour repréſenter celle dont on s'eſt ſervie pour meſurer ſur le terrain, qui ſe nomme *échelle*; enſorte qu'on peut la définir, *une ligne d'une longueur déterminée, à laquelle on ſuppoſe une valeur à volonté.*

Fig. 100. Si on ſuppoſe, par exemple, que la ligne AB ait été déterminée pour repréſenter une longueur de 100 toiſes, ſa moitié AC vaudra 50 toiſes, & cette moitié étant diviſée en cinq parties égales, donnera des diviſions de 10 toiſes chacune; ſi ces diviſions ſont aſſez grandes pour être diviſées en 10 parties égales, elles donneront des toiſes, leſquelles diviſées en 6, donneront des pieds, & ſi les pieds ſont aſſez grands pour être diviſés en douze parties égales, ils donneront des pouces, &c. Tout cela eſt évident, & paroît ſuffiſant pour donner une idée nette & exacte de ce que c'eſt que l'échelle d'une figure, de même que de ſes uſages ou propriétés.

205. *Rapporter ou conſtruire ſur le papier une figure meſurée ſur le terrain.*

Fig. 91. Tout le détail précédent bien conçu,

ſuppoſons à préſent qu'il faut rapporter le triangle ACB ſur le papier; que le côté AC a été meſuré & trouvé de 40 toiſes, le côté BC de 50, & l'angle ACB de 70 degrés.

Cela poſé, on commencera par faire l'échelle de la figure; on tirera pour cela une ligne indéfinie, ſur laquelle on prendra une partie *a c* à volonté, pour repréſenter, par exemple, 10 toiſes; ainſi portant cette partie cinq fois ſur *a b* de *a* en *b*, on aura la longueur ou l'échelle *a b* de 50 toiſes. S'il ſe trouvoit dans la figure des lignes plus longues que 50 toiſes, on pourroit augmenter la longueur de l'échelle; par exemple, la faire de 100 ou 150 toiſes, &c. en prolongeant la ligne *a b*, & portant ſur ſon prolongement, *a c* une ou deux fois, &c. Fig. 101. & 102.

On écrit ſous chaque diviſion de l'échelle le nombre des toiſes qu'elle contient, depuis le commencement *a*, juſqu'au point de la diviſion où l'on eſt parvenu. Ainſi dans cet exemple, on écrit 10 ſous la premiere, 20 ſous la ſeconde, &c. Le dernier nombre écrit à l'extrémité *b* de l'échelle, exprime toute la valeur de l'échelle.

206. L'échelle *a b* ainſi conſtruite, ti- Fig. 101 & 102.

rez ſur le papier une ligne indéfinie *ih*, ſur laquelle vous prendrez la partie *ig* de 40 toiſes de l'échelle, pour repréſenter le côté AC du triangle ACB du terrain : au point *i* vous ferez avec *gi*, par le moyen du rapporteur, l'angle *gim* de 70 degrés, qui eſt la valeur de l'angle ACB du terrain. Vous ferez *im* de 50 toiſes ; qui eſt la longueur de CB, & vous tirerez *gm*, laquelle étant portée ſur l'échelle *ab*, marquera par le nombre des toiſes qu'elle contiendra, le nombre de celles du terrain que contient la ligne à meſurer AB.

Pour le prouver, conſiderez que le triangle *gim* eſt déterminé par les trois mêmes choſes que le triangle ACB du terrain, & que chaque toiſe du papier exprime chaque toiſe du terrain ; qu'ainſi les toiſes de l'échelle que *gm* contient, répondent néceſſairement aux toiſes du terrain que contient la ligne à meſurer AB. On en trouvera une démonſtration plus exacte dans *l'Arithmétique & la Géométrie de l'Officier.*

Fig. 99. & 102. 207. Deux figures, comme les deux triangles *gim* & ACB, déterminées par les mêmes circonſtances, mais avec des meſures différentes, ſont nommées *figures ſemblables*. On trouvera dans le livre qu'on

qu'on vient de citer, un détail plus complet de ces sortes de figures & de leurs proprietés.

PROBLEME II.

208. *Meſurer la largeur d'une riviere ou d'une ligne acceſſible ſeulement par une de ſes extrémités.*

Soit X la riviere dont on veut avoir la largeur : on déterminera une ligne AB au bord de la riviere, d'une longueur à peu près égale à ſa largeur; on mettra le demi-cercle au point A, de maniere qu'en regardant par les pinulles de ſon diamétre, on voye un piquet planté en B ; on mettra enſuite l'alidade ſur le point de 90 degrés, & bornoyant par ſes pinulles, on obſervera un point quelconque, comme C, de l'autre côté de la riviere, qui ſe trouvera dans la direction du rayon viſuel ; on remarquera ce point; on plantera un piquet en A, & l'on viendra avec l'inſtrument en B; on meſurera l'angle ABC, & enſuite la baſe AB, après quoi on connoîtra les trois choſes qui déterminent le triangle ACB ; ſçavoir ſa baſe, & les angles ſur ſa baſe. On le rapportera ſur le papier comme le triangle du premier Fig. 103.

problême *, & l'on connoîtra, par l'échelle, le nombre de toises de la ligne AC, ou de la largeur de la riviere.

*N.206.

REMARQUES.

I.

209. Si le terrain du côté de la base AB se trouve libre & uni, on peut, sans rapporter le triangle CAB sur le papier, le construire bien facilement sur le terrain, en prolongeant vers D la perpendiculaire CA indéfiniment, & faisant au point B l'angle ABD égal à CBA ; son côté BD coupera la perpendiculaire CA prolongée dans un point D, qui donnera AD égale à AC *.

*N.193.

II.

210. On a dit qu'il falloit prendre la base AB à peu près égale à la longueur de la ligne à mesurer, afin d'éviter que l'angle C ne devienne trop aigu, auquel cas le point d'intersection C des lignes AC & BC seroit difficile à déterminer, parce qu'elles se couperoient trop obliquement.

PROBLEME III.

211. *Trouver la longueur d'une ligne CD entiérement inacceſſible.*

On choiſira d'abord dans la campagne une baſe AB, vis-à-vis la ligne à meſurer CD : On imaginera des extrémités A & B de cette ligne aux points C & D, des lignes AC, BC, AD, BD qui donneront les deux triangles CAB, ADB ; qui ont chacun pour baſe la même ligne AB. Fig. 104.

On meſurera enſuite les deux angles de la baſe de chacun de ces triangles ; ſçavoir l'angle CAB & CBA pour le premier ; & DBA, BAD pour le ſecond. On aura après cela les trois choſes qui déterminent ces triangles, & l'on pourra les conſtruire ſur le papier, comme on l'a expliqué n. 206. La diſtance de leurs ſommets donnera en toiſes de l'échelle le nombre des toiſes du terrain que contient la ligne propoſée CD.

REMARQUE.

212. Ce même problême peut ſervir à mener une parallelle à une ligne CD

inacceſſible, car les deux triangles ACB & ADB étant rapportés & conſtruits ſur le papier, on pourra meſurer avec le rapporteur l'angle DCB, & faiſant enſuite au point B un angle avec la ligne BC, égal à BCD, le ſecond côté de cet angle ſera parallele à CD.

PROBLEME IV.

213. *Trouver la hauteur d'une tour ou d'une ligne perpendiculaire à l'horiſon, acceſſible ſeulement par ſon pied.*

Fig. 105. On prendra un point B ſur le terrain du pied de la tour, à une diſtance à peu près égale à ſa hauteur : on poſera le demi-cercle au point B, de maniere que ſa circonference ſoit perpendiculaire au terrain. Pour cela il faut mettre ſon diamétre dans une ſituation parallele au terrain. On y parvient de cette maniere.

214. On ſe ſert d'un petit plomb attaché à l'extrémité d'un fil de ſoye ; on place ce fil au point de 90 degrés de la demi-circonférence de l'inſtrument, & on éleve le diamétre d'un côté ou de l'autre, juſqu'à ce que le fil paſſe par le centre du demi-cercle : alors (*a*) le dia-

(*a*) L'expérience fait voir que les corps peſans

métre eſt dans la ſituation convenable pour l'opération.

On meſurera après cela l'angle EDC en faiſant mouvoir doucement l'alidade de l'inſtrument, juſqu'à ce qu'en bornoyant par ſes pinulles, on apperçoive l'extrémité C de la hauteur AB qu'on veut meſurer; l'arc *ab* de l'inſtrument ſera la valeur de l'angle CDE. Voilà donc déja un angle de connu dans le triangle DEC: Mais l'angle DEC ou ſon égal BAC, eſt auſſi connu, puiſque AC eſt ſuppoſée perpendiculaire au terrain BA. Ainſi meſurant la baſe BA, à

tendent au centre de la terre, & voici comment.

Si l'on ſuſpend un plomb à un fil attaché à une ligne parallele à l'horiſon, il fait des angles droits avec cette ligne, ainſi il en feroit auſſi avec le terrain ſi le fil étoit continué juſqu'à ſa rencontre: Or, toute ligne horiſontale étendue ſeulement de cent ou deux cens toiſes peut être regardée comme une ligne droite, tangente à la circonference de la terre, qui la touche au point où le plomb la rencontre, parce que la groſſeur de la terre rend ſa courbure inſenſible dans une auſſi petite diſtance: Donc le fil auquel le plomb fait prendre une direction perpendiculaire à la ſurface de la terre, paſſeroit par ſon centre, en la ſuppoſant ronde, ou à peu près ronde, comme on le ſait communément, s'il étoit aſſez long pour y parvenir, puiſque toute perpendiculaire élevée ſur la tangente au point touchant, paſſe par le centre du cercle. ſi elle eſt prolongée juſques là. * Donc le diamétre de l'inſtrument faiſant des angles droits avec le fil de ſoye qui eſt perpendiculaire à l'horiſon, eſt dans cette ſituation, parallele à l'horiſon. * N. 148.

laquelle DE eſt égale, on connoîtra les trois choſes qui déterminent le triangle DEC; enſorte qu'en le conſtruiſant ſur le papier avec l'échelle, on viendra à la connoiſſance de EC, & ajoutant à cette ligne la hauteur ED de l'inſtrument, qui eſt égale à AE, on aura la hauteur AC.

REMARQUES.

I.

215. Il eſt évident que ſi l'angle CDE étoit de 45 degrés, l'angle DCE auroit auſſi la même valeur; par conſéquent le triangle DEC ayant deux angles égaux, auroit les côtés CE & DE oppoſés à ces angles auſſi égaux*: Donc DE ou BA ſeroit alors égale à EC, c'eſt-à-dire, à la hauteur de la ligne qu'on veut meſurer, moins celle de l'inſtrument.

*N. 182.

II.

216. On peut, en tatonant, parvenir aiſément à avoir l'angle CDE de 45 degrés: car s'il ſe trouve d'abord plus petit, il n'y a qu'à s'approcher de A, c'eſt-à-dire, diminuer la longueur de la baſe AB*, & s'il eſt plus grand, s'en

*N. 181.

éloigner ou augmenter AB, & cela, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à avoir l'angle formé de l'horisontale DE, & de l'inclinée DC de 45 degrés.

PROBLEME V.

217. *Trouver la hauteur d'une ligne CD perpendiculaire à l'horison, de laquelle on ne peut s'approcher, c'est-à-dire, qui est entiérement inaccessible.* Fig. 106.

Il faut choisir dans un terrain uni de la campagne une base AB, des extrémités de laquelle on puisse voir le point C.

Il faut ensuite poser l'instrument au point A dans une situation verticale, comme dans le problême précédent, & mesurer l'angle CEF formé par la ligne imaginaire EC, & par la parallele à la base EF.

On mettra après cela le demi-cercle au point B, & posé comme en A: alors on mesurera l'angle EFC, & l'on mesurera aussi la base AB, à laquelle EF sera égale: on connoîtra ainsi les trois choses qui déterminent le triangle ECF; sçavoir sa base EF, & les angles sur cette base: on pourra donc le rapporter sur le papier avec une échelle. Lorsqu'il y

ſera conſtruit, on aura le point C placé ſur le papier comme ſur le terrain : Mais la hauteur du terrain qu'on veut connoître, eſt une perpendiculaire qui tombe de C ſur le terrain, ou ſur le prolongement de AB : Donc en prolongeant ſur le papier, la baſe EF indéfiniment, & faiſant tomber de C une perpendiculaire ſur cette baſe, elle exprimera en toiſes de l'échelle, le nombre des toiſes du terrain que contient la ligne CG ſur le terrain, & ajoutant à cette valeur la hauteur AE ou BF de l'inſtrument, on aura la hauteur de la ligne CD.

REMARQUES.

I.

218. Il faut que la baſe EF ſoit priſe aſſez grande pour qu'il y ait une différence ſenſible entre l'angle CEF, & l'angle CFG, ſupplément de EFC ; autrement les lignes CE, CF ne concoureroient point, car elles pourroient être conſiderées comme paralleles *.

*N. 132.

II.

219. Le triangle ECF étant con-

ſtruit ſur le papier, & la perpendiculaire CG abbaiſſée du ſommet C ſur le prolongement de la baſe EF, il eſt clair qu'on peut connoître auſſi, avec l'échelle, la ligne FG ou BD : ainſi ſi l'on ſuppoſe que CD ſoit la hauteur d'une tour ou celle d'une montagne ; l'opération qu'on vient de faire, fera connoître non-ſeulement la valeur de la perpendiculaire abbaiſſée du ſommet de la tour ou de la montagne ſur le plan de la baſe AB ; mais encore la diſtance du point B de la baſe au milieu de la tour ou de la montagne.

III.

220. Il eſt évident que cette opération ne donne la hauteur de l'objet propoſé CD qu'au deſſus du terrain de la baſe AB, & qu'ainſi, ſi cet objet étoit dans un terrain plus enfoncé ou plus profond que celui de AB, on n'auroit la hauteur de cet objet qu'au deſſus du terrain de la baſe AB.

PROBLEME VI.

221. *D'un lieu élevé perpendiculairement au-deſſus d'un terrain, & dont*

la hauteur peut être connue, trouver la largeur de ce terrain.

Fig. 107. Soit C le lieu élevé au deſſus du terrain AB, comme par exemple, l'ouverture d'une croiſée, ou la partie ſupérieure d'une tour, il faut de ce lieu meſurer la ligne horiſontale AB.

On poſera le demi-cercle en C, de maniere que ſon diamétre ſoit perpendiculaire au terrain ou parallele à CA. Ce qui eſt fort aiſé, en mettant un fil avec un plomb à l'extrémité ſupérieure du diamétre, & en arrangeant l'inſtrument de maniere que le fil paſſe auſſi par l'autre extrémité.

Cela fait, on fera mouvoir l'alidade, juſqu'à ce qu'en regardant par ſes pinulles on apperçoive le point B; alors on aura l'arc *ab* du demi-cercle qui donnera la valeur de l'angle ACB. L'angle CAB eſt droit, puiſqu'on ſuppoſe que AC eſt perpendiculaire au terrain : Ainſi il ne s'agit plus que de connoître CA pour pouvoir conſtruire le triangle CAB ſur le papier. Pour cela, on fera tomber un plomb ou une pierre par l'ouverture C, auquel ſera attachée une corde, & on le fera deſcendre ainſi juſqu'en A; meſurant

enſuite la longueur de cette corde, compriſe entre C & A, on connoîtra la hauteur CA, & par conſéquent on pourra connoître AB, en conſtruiſant le triangle CAB ſur le papier, comme dans les problêmes précédens.

PROBLEME VII.

222. *Meſurer un angle ABC, dont on ne peut approcher.* Fig. 108.

Il faut choiſir dans la campagne un point quelconque D dans le prolongement de BC, & y faire planter un piquet D, & de même un autre point E dans le prolongement de AB : enſuite imaginant la ligne DE, on meſurera les angles BDE, BED : on ôtera leur ſomme de 180 degrés ; le reſte ſera la valeur de DBE *, & par conſéquent celle de ſon oppoſé au ſommet ABC. *N. 178.

REMARQUE.

223. Si l'on peut approcher du point B, on meſurera fort facilement & ſans inſtrument, l'angle ABC ; car prolongeant les côtés AB & BC d'une grandeur arbitraire BD & BE, & les meſurant, Fig. 108.

de même que la distance DE de leurs extrémités D & E, on aura un triangle DBE dont les 3 côtés seront connus; ensorte qu'en le construisant sur le papier, par le moyen d'une échelle, on pourra après cela en mesurer les angles avec le rapporteur, & connoître ainsi
*N.190. l'angle proposé ABC * qui est égal à DBE.

Fig.109. On peut de la même maniere mesurer en dedans un angle IBG accessible.

PROBLEME VIII.

224. *Faire la carte d'un Pays.*

La carte d'un Pays est une figure plane, sur laquelle sont marqués tous les lieux qu'il contient, suivant la position qu'ils ont entr'eux. C'est proprement une figure semblable au Pays, sur laquelle on connoît toutes les distances des lieux par le moyen d'une échelle.

On n'a pas dessein d'entrer dans cet ouvrage dans tout le détail dont cette opération est susceptible; on veut seulement donner une idée de la maniere dont on y procede, par le moyen des triangles. Ceux qui voudront une instruction plus ample sur cette matiere, pour-

ront consulter utilement le Livre intitulé, *Méthode de lever les plans & les cartes de terre & de mer*, &c. Il se vend chez *Jombert*, Quay des Augustins à Paris.

Pour lever la carte d'un terrain, il faut commencer par choisir un endroit dans la campagne, duquel on puisse découvrir beaucoup de lieux considérables, comme clochers moulins, châteaux, &c.

On fait mesurer dans cet endroit une ligne AB des extrémités A & B, de laquelle on découvre le plus qu'il est possible de ces lieux. Fig 114.

On place le demi-cercle au point A, & l'on fait planter un jalon en B, auquel on attache du papier ou un mouchoir blanc, pour aider à découvrir plus aisément ce jalon de A.

On dispose le demi-cercle de maniere, qu'en regardant par les pinulles ou la lunette de son diamétre, on voye le jalon B.

Cela fait, on prend tous les lieux remarquables C, D, E, F, &c. qui sont devant la ligne AB, c'est-à-dire, qu'on imagine les lignes AC, AD, AE, &c. & qu'on mesure les angles CAB, DAB, EAB, &c. que ces lignes font avec la base AB.

Fig. 111. On écrit sur une feuille de papier, sur laquelle on figure l'opération, & qui s'appelle *brouillon* ou *mémorial* X, la valeur de chacun de ces angles, avec le nom des lieux C, D, E, &c. & l'on écrit le long de chacune de ces lignes AC, AD, AE, &c. le nom du lieu observé, c'est-à-dire, de l'objet C, D, E, &c.

Fig. 110. & 111. Tous ces angles ayant été mesurés & marqués sur le mémorial X, on ôte le demi-cercle du point A; on met à sa place un jalon avec une marque distinctive pour le faire appercevoir de B, & l'on porte l'instrument en B, où on le pose de maniere qu'en regardant par les pinulles ou la lunette de son diamétre on apperçoive le jalon A.

On imagine ensuite les lignes BC, BD, BE, &c. & l'on mesure les angles CBA, DBA, ABE, &c. c'est-à-dire, ceux que tous les lieux observés par la premiere opération font avec l'autre extrémité B de la base AB; on écrit le long de chaque côté BC, BD, &c. tracé sur le mémorial X, le nom des objets C, D, &c. comme on l'a fait en A, & l'on écrit aussi la valeur des angles observés ou mesurés entre les côtés de chaque angle, dans un petit arc renfermé

entre ces côtés ; le tout comme on le voit en X, qui eſt la figure de ce mémorial.

Par cette ſeconde opération, tous les lieux C, D, E, deviennent les ſommets des triangles ACB, ADB, &c. qui ont AB pour baſe commune, & dont les angles de la baſe ſont connus par les opérations que l'on a faites à ſes extrémités. Il ſuit de-là, que les trois choſes qui déterminent chacun de ces triangles, ſont connues *: ainſi il ne s'agit plus que de les rapporter ſur le papier, pour avoir la poſition de tous les lieux obſervés de la baſe AB, c'eſt-à-dire, de mettre au net le mémorial X. *N. 193.

Pour cela, il faut tirer ſur le papier une ligne *ab*, à laquelle il faut donner autant de toiſes de l'échelle qu'on trouve que la baſe AB en contenoit ſur le terrain. A ſes extrémités *a* & *b*, on fait avec le rapporteur, des angles égaux à ceux qui ont été meſurés aux points A & B ſur la baſe AB du terrain ; les côtés de ces angles étant prolongés ſe coupent dans des points *c*, *d*, *e*, *f*, &c. qui déterminent, ſur le papier, la poſition des lieux C, D, E, &c. le point *c* où les deux lignes ſur leſquelles on a écrit le lieu C ſe coupent, donne la poſition Fig. 111 & 112.

de ce lieu ; celui où ſe joignent celles ſur leſquelles on a écrit le lieu D, donne la poſition de D, & ainſi des autres.

On prend & on rapporte de la même maniere la poſition de tous les objets conſidérables qui ſont de l'autre côté de la baſe, & ſi l'on veut prendre un plus grand nombre de poſitions que l'on n'en découvre des extrémités de la baſe AB, on choiſit pour nouvelle baſe la diſtance de deux lieux C & D déja déterminés par les premieres opérations, & l'on prend enſuite la poſition de tous les lieux qu'on découvre de part & d'autre de cette nouvelle baſe, comme on l'a fait ſur la premiere AB Après quoi, s'il en eſt beſoin, on choiſit encore une nouvelle baſe comme la ſeconde, & l'on opere ainſi ſucceſſivement ſur chaque baſe, juſqu'à ce que l'on ait la poſition de tous les Bourgs, Villages, Hameaux, Châteaux, &c. du lieu dont on veut faire la carte.

On rapporte ſur le papier toutes les opérations faites ſur chaque baſe, comme on a rapporté celles de la baſe AB. On place après cela l'échelle dans un endroit de la carte, & on la diviſe en toiſes ou en lieues, ſuivant la meſure qu'elle repréſente ;

repréſente ; le tout comme on l'a expliqué, n. 204.

Une attention qu'il faut avoir en prenant la poſition des lieux qu'on veut marquer ſur la carte, c'eſt que ces lieux ne faſſent point avec la baſe des angles trop aigus ou trop obtus, autrement le point d'interſection des lignes qui en donnent la poſition, deviendroit difficile à diſtinguer, parce que ces lignes ſe couperoient trop obliquement. Pour éviter cet inconvenient, il faut, autant qu'il eſt poſſible, ne prendre que de grandes baſes, & déterminer ſeulement la poſition des lieux qui ſont vis-à-vis de part & d'autre. Pour les autres lieux, on les déterminera par de nouvelles baſes qu'on choiſira, de la maniere qu'on jugera la plus avantageuſe pour avoir exactement la poſition de ces lieux.

S'il y a des bois dans le pays dont on fait la carte, on prend la poſition des principaux arbres qui les entourent de tous côtés ; après quoi l'eſpace renfermé par des lignes tirées des uns aux autres, donne ſur la carte l'emplacement & la figure du bois. On déterminera de même le cours des rivieres, en prenant la poſition de différens grands jalons qu'on fait planter ſur les bords pour avoir

différens points du bord de ces rivieres.

REMARQUE.

225. Il eſt d'uſage de marquer ſur les cartes le côté du Nord, on le fait ordinairement en y deſſinant une *bouſſolle*; ſa figure eſt celle d'une eſpece de croix de Chevalier, dont une des pointes a une fleur-de-lys qui exprime le côté du Nord. Lors qu'une carte a une bouſſolle, on dit qu'elle eſt *orientée*.

226. Il eſt aiſé d'orienter une carte, en obſervant l'angle que l'aiguille aimantée fait ſur le terrain avec la baſe que l'on a meſurée. C'eſt principalement pour cette obſervation, qu'au centre du demi-cercle on conſtruit, preſque toujours, une bouſſolle, qui ne conſiſte que dans une aiguille aimantée, qui tourne librement ſur un pivot. On ſçait que la proprieté de cette aiguille eſt d'avoir toujours une de ſes pointes tournée du côté du Nord, ou à peu près; je dis à peu près, parce qu'elle s'en écarte aſſez ſouvent d'un côté ou d'un autre; cet écartement ſe nomme la *déclinaiſon de la bouſſolle*.

Dans une carte d'une petite étendue, on peut ſe diſpenſer d'y avoir égard. Il

y a des méthodes exactes pour la connoître; mais ce n'eſt pas ici le lieu d'expliquer en quoi elles conſiſtent. Il ſuffit de dire que cette variation eſt regardée comme irréguliere juſqu'à préſent, qu'elle n'eſt pas la même dans tous les lieux de la terre, & qu'elle change aſſez ſouvent dans les mêmes lieux.

La bouſſole conſtruite dans le demi-cercle eſt enfermée dans un enfoncement circulaire, le pivot ſur lequel elle eſt ſuſpendue en occupe le centre : la ligne qui marque le nord & le côté oppoſé, qui eſt le midi, eſt parallele au diamétre du demi-cercle; la circonférence de l'eſpace dans lequel la bouſſole ſe meut, eſt diviſée en degrés; ainſi on peut voir de quelle quantité l'aiguille s'éloigne de la ligne du Nord, & par conſéquent l'angle qu'elle fait avec la baſe du terrain, qui eſt le même que celui qu'elle fait avec la ligne du Nord, ces deux lignes étant paralleles.

227. On obſervera ici qu'on appelle *Cartes Geographiques* celles qui contiennent un grand pays, comme un Royaume, une Province, &c. & qu'on appelle cartes *Topographiques* celles qui ne contiennent qu'un petit pays, comme une Ville avec ſes environs, une ter-

X.

Des Quadrilateres.

Fig. 113. 228. LE *quadrilatere*, eſt une figure terminée par quatre côtés, comme A.

Fig. 114. 229. *Le quarré* B, eſt un quadrilatere qui a ſes quatre côtés égaux & ſes angles droits.

Fig. 115. & 116 230. *Le parallelogramme* C, eſt un quadrilatere qui a ſes côtés oppoſés paralleles; ſi ſes angles ſont droits, on l'appelle *parallelogramme rectangle*, ou pour abréger, ſimplement *rectangle*; tel eſt le parallelogamme D.

Fig. 117. 231. *Le rhombe* ou *lozange* E, eſt un quadrilatere qui a tous ſes côtés égaux, & les oppoſés paralleles, mais qui n'a pas ſes angles droits.

Fig. 118. 232. *Le trapeze* F, eſt un quadrilatere qui n'a que deux côtés paralleles.

Fig. 119. 233. Le quadrilatere qui n'a point de côtés paralleles ſe nomme quadrilatere irrégulier, ou *trapezoïde*, comme G.

234. On appelle *diagonale* dans un quadrilatere une ligne, comme AD, tirée d'un angle quelconque A à son opposé D, en passant dans le quadrilatere. Fig. 120

235. La *base* d'un parallelogramme ABCD est un de ses côtés CD pris à volonté, & sa hauteur est une perpendiculaire AE abbaissée du côté AB, opposé à la base AB, sur cette base.

Il suit de cette définition, que lorsque le parallelogramme est rectangle, sa hauteur est la même que le côté qui fait un angle avec la base; car ce côté est alors perpendiculaire entre la base & le côté opposé à la base.

THEOREME I.

236. *Les côtés opposés des parallelogrammes sont égaux.*

DEMONSTRATION.

Soit le parallelogramme X, il faut démontrer que AD est égal à BC. Fig. 121

Des points D & C abbaissés sur AB, prolongée s'il en est besoin, les perpendiculaires DF & CE. Elles donneront les triangles égaux ADF & BCE. Car à cause de ces perpendiculaires les an-

gles en F & en E ſont droits, & comme elles ſont tirées entre des paralleles, elles ſont égales : de plus l'angle intérieur DAF eſt égal à ſon oppoſé extérieur CBE, donc le troiſiéme angle ADF du premier triangle, eſt égal au troiſiéme du ſecond BCE. Donc les deux triangles propoſés ont les côtés DF & CE égaux, de même que les angles ſur ces côtés : Donc ils ſont égaux : Donc les côtés AD & BC oppoſés aux angles égaux F & E ſont égaux *. C.q.f.d.

*N. 186.

On démontrera de la même maniere l'égalité des deux autres côtés DC & AB.

THEOREME II.

237. *La diagonale tirée dans le parallélogramme ou le quarré, le diviſe en deux triangles égaux.*

DEMONSTRATION.

Fig. 122. Soit le parallelogramme X, dans lequel on a tiré la diagonale AD ; il faut démontrer qu'elle partage ce parallelogramme en deux triangles ACD, DAB qui ſont égaux.

Pour cela, conſiderez que les trois côtés de chacun de ces triangles ſont

égaux entr'eux ; car par la propoſition précédente, le côté AC du premier eſt égal au côté BD du ſecond, & le côté DC à AB : AD appartient à l'un & à l'autre : Donc les trois côtés de ces triangles ſont égaux, chacun à chacun : Donc ils ſont égaux entr'eux*. *N. 190.

Il eſt évident que cette démonſtration eſt la même pour le quarré.

COROLLAIRE.

Il ſuit de-là,

238. 1°. Que la diagonale tirée dans un parallelogramme ou dans un quarré, le divise en deux également.

239. Et 2°. Que tout triangle eſt la moitié d'un parallelogramme de même baſe & même hauteur.

Car ayant le triangle ACB, ſi on mene par C, une parallele CD à ſa baſe AB, & par B, une parallele à AC, on aura le parallelogramme ABDC qui aura même baſe AB que le triangle, & même hauteur CG : Mais le côté CB ſervant de diagonale à ce parallelogramme, le triangle ACB en eſt la moitié : Donc, &c. Fig. 123.

THEOREME III.

Fig. 124. 240. *Dans tout parallelogramme ABCD, les angles opposés, comme D & B, sont égaux.*

DEMONSTRATION.

Considerez qu'à cause des paralleles AD & BC, les angles C & D valent
N. 152. deux angles droits *, & que les paralleles AB & CD donnent aussi les angles C & B égaux à deux droits: Donc les angles opposés D & B différent de 180 degrés du même angle C: Donc ils sont égaux entr'eux.

On démontrera de même que l'angle A est égal à l'angle C.

THEOREME IV.

241. *Les angles de tout quadrilatere sont égaux, pris ensemble, à quatre angles droits.*

DEMONSTRATION.

Fig. 125. Soit le quadrilatere quelconque ABDC, pour démontrer que ses quatre angles

gles ſont égaux à quatre angles droits, il faut tirer la diagonale DA, qui le partagera en deux triangles quelconques ABD, ADC. Les angles de ces triangles ſont les mêmes que ceux du quadrilatere: Or, chacun vaut deux angles droits *: Donc le quadrilatere en vaut quatre. C. q. f. d. *N.177.

PROBLEMES.

I.

242. *Une ligne AB étant donnée pour le côté d'un quarré, décrire ce quarré.* Fig.126

RESOLUTION.

Aux extrémités A & B de la ligne donnée, élevez des perpendiculaires AD & BC, égales chacunes à AB, joignez ces perpendiculaires par la ligne DC, & le quarré ſera conſtruit: ce qui eſt évident *. *N.229.

II.

243. *Conſtruire un rectangle dont les deux côtés qui ſont un angle, ſoient égaux aux lignes données A & B.*

RESOLUTION.

Tirez une ligne EC égale à la ligne Fig.127

donnée A ; élevez à ſes extrémités E & C deux perpendiculaires EF, CD, égales chacune à l'autre ligne donnée B, & tirez FD. Le rectangle ECDF aura pour côtés les deux lignes A & B. Ce qui eſt évident.

III.

Fi. 128. 244. *Conſtruire un parallelogramme, qui ait pour côtés deux lignes égales à deux lignes données A & B, qui faſſent enſemble un angle égal à un angle auſſi donné C.*

RÉSOLUTION.

Tirez une ligne DF égale à A, & faites au point D l'angle FDE égal à l'angle donné C ; prenez DE égale à B, puis du point E pris pour centre, & de l'intervalle DF, décrivez un arc vers G. Du point F pris enſuite auſſi pour centre, & de l'intervalle DE, décrivez un ſecond arc qui coupe le premier en G : tirez GF & GE, vous aurez le parallelogramme incliné DFGE, avec les circonſtances demandées.

XI.

Des Polygones.

245. ON appelle *Polygone* toute figure de plusieurs côtés ou de plusieurs angles.

246. Suivant cette définition, les triangles & les quadrilateres sont des polygones, & ils en sont effectivement; mais dans l'usage ordinaire, on ne se sert du terme de polygone que pour les figures qui ont plus de quatre côtés.

Chaque polygone a un nom particulier qui se tire du nombre de ses côtés ou de ses angles.

247. Celui de cinq côtés est appellé *Pentagone.*

248. De six, *Exagone.*

249. De sept, *Eptagone.*

250. De huit, *Octogone.*

251. De neuf, *Enneagone.*

252. De dix, *Décagone.*

253. De onze, *Endécagone.*

254. De douze, *Dodécagone.*

255. Et enfin celui de treize côtés est appellé Polygone de treize côtés, &c.

Il y a des polygones réguliers & des irréguliers.

Fi. 129. & 130. 256. Le *Polygone régulier*, eſt celui qui a tous ſes côtés & ſes angles égaux ; tel eſt le polygone A ; & *l'irrégulier* eſt celui qui a de l'inégalité dans ſes côtés ou dans ſes angles, comme le polygone Z.

257. Les côtés qui terminent le polygone ſe nomment tous enſemble ſa *circonference* ou ſon *perimetre*.

Fi. 131. 258. Tout polygone régulier X, a un centre. C'eſt un point C également éloigné du ſommet des angles que font enſemble les côtés AB, BD, &c. du polygone.

On conſidere deux ſortes de rayons dans le polygone régulier ; ſçavoir, le droit & l'oblique.

259. Le *rayon droit* eſt la perpendiculaire CE abbaiſſée du centre C du polygone ſur un de ſes côtés quelconque AB.

260. Le *rayon oblique* eſt la ligne droite tirée du centre C à un des angles quelconque du polygone, comme CA, CB, &c.

261. Le rayon oblique meſure la diſtance du centre du polygone aux angles de ſa circonference ; & comme toutes

ces distances sont égales, par la définition du centre du polygone, il s'ensuit que tous les rayons obliques sont égaux entr'eux.

Il suit aussi de la définition du rayon droit,

262. 1°. *Qu'il mesure la distance du centre C du polygone à chacun de ses côtés AB*.* *N. 116.

263. *Et* 2°. *Qu'il coupe chaque côté AB du Polygone en deux également.*

Car le centre C, étant, par sa définition, à égale distance de A & de B*, *N. 258. & CE étant perpendiculaire sur AB, doit avoir tous ses points à égale distance de A & de B*; ainsi le point E du *N. 112. rayon droit CE est au milieu de AB.

264. 3°. *Que tous les rayons droits, comme CE, CG, &c. sont égaux.*

Car tous les côtés du polygone X Fi. 131. étant égaux, & les rayons droits les coupant perpendiculairement, & en deux également*, leurs moitiés AE, BG, *N. 263. &c. sont égales: Or si l'on imagine que BG soit porté exactement sur AE, les angles AEC, BGE, étant droits, GC tombera sur EC, & comme les lignes AC & BC sont égales, que d'ailleurs

les points qui les terminent ſont les mêmes dans cette poſition, il s'enſuit que les deux triangles AEC & CGB ſe couvrent exactement. Donc CE eſt égale à CG. Donc, &c.

Fi. 131. Le polygone régulier, comme X, a auſſi deux ſortes d'angles; ſçavoir, celui du centre, & celui de la circonference.

265. *L'angle du centre* d'un polygone régulier, eſt un angle ACB formé de deux rayons obliques CA, CB, qui ſe terminent aux extrémités A & B du même côté du polygone.

266. Et *l'angle de la circonference* eſt un angle, comme ABD, formé de deux côtés AB, BD du polygone.

Fi. 130. Lorſque le polygone eſt irrégulier, comme Z, il a quelquefois des angles *rentrans* & des *ſaillans*.

267. L'angle rentrant eſt un angle, comme A, dont le ſommet rentre en dedans du polygone, & dont la meſure eſt en dehors; & le ſaillant, comme B, eſt un angle dont le ſommet ſaille en dehors du polygone, & dont la meſure eſt en dedans. Les polygones réguliers n'ont que des angles ſaillans.

THEOREME I.

268. *Si l'on tire tous les rayons obliques d'un polygone régulier X, il ſera partagé en autant de triangles égaux, qu'il a de côtés.*

Cette propoſition eſt évidente, car tous les rayons obliques étant égaux entr'eux *, de même que tous les côtés du polygone, il s'enſuit que les triangles, comme ACB, BCD, &c. qui ont chacun pour baſe les côtés égaux du polygone, & qui ont pour leurs deux autres côtés deux rayons obliques, ont leurs trois côtés égaux, chacun à chacun : Donc ils ſont égaux *. Fi. 132. *N. 261. *N. 190.

Corollaires.

Il ſuit de cette propoſition,

269. 1°. Que tous les angles des triangles ACB, BCD, &c. du polygone X, ſont égaux, comparés chacun à chacun, parce que ces triangles ont leurs trois côtés égaux *; qu'ainſi *tous les angles du centre d'un polygone régulier, ſont égaux entr'eux.* Fi. 132. *N. 190.

270. Mais comme tous les angles

qu'on peut faire autour d'un même point C, ne valent jamais que quatre angles
*N. 90. droits *, tous les angles du centre valent donc, pris enſemble, quatre angles droits. Comme ils ſont égaux entr'eux, & qu'il y en a autant que le polygone a de côtés, ils partagent la circonference du cercle, c'eſt-à-dire, la valeur de quatre angles droits, en autant de parties égales que le polygone a de côtés. D'où il ſuit,

271. *Que pour avoir l'angle du centre d'un polygone régulier quelconque, il faut diviſer 360 degrés par le nombre de ſes côtés.*

Ainſi l'angle du centre du pentagone vaut la cinquiéme partie de 360 degrés, ou 72 degrés; celui de l'exagone la ſixiéme partie de 360 degrés, ou 60 degrés; celui du décagone la dixiéme partie de la circonference, ou 36 degrés, & ainſi des autres.

272. 2°. Que les angles CAB, CBA, CBD, & CDB, &c. faits ſur les côtés AB, BD du polygone par les rayons obliques CA, CB, CD, &c. ſont auſſi égaux entr'eux; parce qu'à cauſe de l'égalité de ces rayons, ces triangles ſont iſoſcelles; ainſi les angles ABC
*N. 182. & CBD ſont égaux entr'eux *: Donc

ils ſont chacun la moitié des angles de la circonférence du polygone. D'où il ſuit,

273. *Que chaque angle de la circonférence d'un polygone régulier, comme ABD ou BDH, eſt coupé en deux également par le rayon oblique CB ou CD.*

274. Ainſi pour trouver le centre C d'un polygone régulier X, il faut couper deux angles de ſa circonference, comme GAB, & ABD en deux également, & le point de rencontre C, des lignes AC, BC, qui diviſent ainſi ces angles, ſera le centre cherché du polygone. Fi. 132.

THEOREME II.

275. *L'angle du centre ACB d'un polygone régulier quelconque X, & l'angle de la circonference DAB du même polygone, joints enſemble, ſont égaux à deux angles droits.* Fi. 132.

DEMONSTRATION.

Conſiderez que les trois angles du triangle ACB ſont égaux à deux angles droits *, & que les deux angles de ſa *N. 177.

baſe, ſçavoir, CAB, & CBA ſont chacun la moitié de l'angle de la circonférence de ce polygone *: Donc ils ſont pris enſemble égaux à cet angle; mais joints avec l'angle du centre ACB, ils valent deux droits: Donc l'angle de la circonference DAB, qui leur eſt égal, joint à l'angle du centre ACB, vaut auſſi deux angles droits. C. q. f. d.

*N.273.

COROLLAIRE.

276. Il ſuit de cette propoſition, que lorſqu'on connoît l'angle du centre d'un polygone régulier, on peut connoître aiſément celui de ſa circonference; car ôtant de 180 degrés l'angle du centre de ce polygone, le reſte ſera la valeur de celui de la circonference.

Ainſi l'angle du centre du pentagone étant de 72 degrés, ſi on l'ôte de 180, il reſtera 108 degrés pour la valeur de l'angle du centre du pentagone régulier.

On déterminera de la même maniere celui des autres polygones réguliers, & l'on trouvera que l'angle de la circonference de l'exagone eſt de 120 degrés; celui de l'eptagone de 128 degrés, celui de l'octogone de 135, &c.

THEOREME III.

277. *Tous les polygones réguliers différens, mais de même nombre de côtés, ont leurs angles du centre égaux, de même que ceux de la circonférence.*

Cette propoſition eſt évidente ; car les angles du centre des polygones réguliers de même nombre de côtés, ſont les mêmes parties des 360 degrés de la circonférence du cercle ; & ces angles étant égaux, ceux de la circonference, qui ſont la quantité dont ils different de 180 degrés, le ſont auſſi également. Donc, &c.

THEOREME IV.

278. *Si du centre C d'un polygone régulier X, & de l'intervalle CA d'un de ſes rayons obliques, on décrit une circonference,*

1°. *Elle paſſera par le ſommet de tous les angles de la circonference de ce polygone.* Fi. 134.

Et 2°. *Elle ſera diviſée par les rayons obliques CA, CB, &c. en autant de*

parties égales que le polygone a de côtés.

DEMONSTRATION.

La premiere partie de cette propoſition eſt évidente; car le centre C étant également diſtant du ſommet de tous les angles de la circonference du polygone X; ſçavoir, de l'intervalle du rayon oblique *, la circonference qui ſera décrite de C pris pour centre, & du rayon CA, doit néceſſairement paſſer par tous les angles B, D, &c. de ce polygone, puiſqu'elle paſſera par tous les points qui ſeront éloignés de C de la longueur CA.

*N. 261.

La ſeconde partie l'eſt auſſi également; car tous les angles du centre du polygone, comme ACB, BCD, &c. étant égaux entr'eux *, les parties de la circonference compriſe entre leurs côtés, & décrite de leur ſommet pris pour centre, ſeront égales entr'elles; mais il y a autant de ces parties que de côtés dans le polygone: Donc, &c.

*N. 276.

COROLLAIRE.

279. Il ſuit de cette propoſition que pour décrire un polygone régulier quelconque dans un cercle, dont tous les an-

gles en touchent la circonference, il faut la diviſer en autant de parties égales que le polygone doit avoir de côtés, & que les cordes de ces diviſions donneront les côtés du polygone.

Un polygone, commé X renfermé ou décrit dans un cercle, & dont tous les angles en touchent la circonference, eſt dit être *inſcrit dans le cercle*, & le cercle *circonſcrit au polygone*: Le corollaire de la propoſition précédente donne donc la méthode générale d'inſcrire un polygone régulier dans un cercle. Fi. 134.

THEOREME V.

280. *Si du centre C d'un polygone régulier, & de l'intervalle de ſon rayon droit C A, on décrit un cercle, il touchera par le milieu tous les côtés du polygone, qui ſeront chacun autant de tangentes du cercle.* Fi. 135.

DEMONSTRATION.

Conſidérez que les rayons droits de tout polygone régulier ſont égaux entr'eux *, & qu'ils coupent le côté du polygone perpendiculairement & en deux également *; qu'ainſi le cercle qui ſera *N. 264. *N. 263.

décrit du centre du polygone, & de l'intervalle de ſon rayon droit, paſſera par toutes les extrémités des mêmes rayons : Donc il touchera par le milieu chacun des côtés du polygone : mais ces côtés ſont perpendiculaires aux rayons droits du polygone, c'eſt-à-dire, aux rayons du cercle qui a pour rayon le rayon droit, dont ils ſeront autant de tangentes de ce cercle * : Donc, &c.

*N. 146.

281. Un polygone régulier, comme B D E F &c. dont tous les côtés touchent la circonférence du cercle qu'ils renferment, eſt dit être *circonſcrit au cercle*, & le cercle *inſcrit dans le polygone.*

REMARQUE.

282. Un polygone regulier BDEF, &c. étant circonſcrit à un cercle, il eſt évident que ſi l'on tire tous ſes rayons obliques C B, C D, C E, &c. ils partageront la circonférence du cercle inſcrit, en autant de parties égales que le polygone circonſcrit a de côtés : enſorte que ſi l'on tire les cordes *b d*, *d e*, *e f*, &c. de toutes ces parties, on aura un polygone inſcrit dans le cercle, de même nombre de côtés que celui qui eſt circonſcrit au même cercle : alors tous les

côtés du circonscrit seront des tangentes aux rayons droits du polygone inscrit, prolongés jusqu'à la circonférence du cercle dans lequel il est inscrit, lesquelles tangentes sont terminées de part & d'autre, par le prolongement des rayons obliques du polygone inscrit.

283. D'où il suit qu'un polygone régulier *b d e f* étant inscrit dans un cercle, pour circonscrire au même cercle un polygone régulier d'un même nombre de côtés, il faut prolonger les rayons droits du polygone inscrit, jusqu'à la rencontre de la circonférence de ce cercle, mener à cette circonférence, par les points où ils la toucheront, des tangentes terminées de part & d'autre par le prolongement des rayons obliques du premier polygone; & que ces tangentes donneront un polygone circonscrit au cercle du même nombre de côtés que l'inscrit. Fi. 135.

THEOREME VI.

284. *Le côté de l'Exagone régulier inscrit dans un cercle, est égal au rayon de ce cercle.*

Soit l'exagone régulier ABDE &c. inscrit dans le cercle X; je dis que son Fi. 136.

côté A B eſt égal au rayon A C de ce cercle.

DEMONSTRATION.

Tirez le rayon oblique C B qui donnera le triangle C A B, qui a ſes trois angles égaux.

Car comme l'exagone a ſix côtés, ſon angle du centre A C B vaut la ſixiéme partie de la circonférence, ou 60 dégrés * ; les deux autres angles du même triangle C A B & C B A, ſont égaux entr'eux, à cauſe de l'égalité des rayons obliques C A & C B * : Ainſi comme les trois angles de tout triangle valent 180 dégrés *, & que l'angle C en vaut 60 ; il reſte donc 120 dégrés pour les deux angles C A B & C B A, c'eſt-à-dire, 60 pour chacun, puiſqu'ils ſont égaux : Donc les trois angles du triangle A B C ſont égaux entr'eux : Donc ſes côtés le ſont auſſi * : Donc le côté A B de l'exagone eſt égal au rayon C A du cercle dans lequel il eſt inſcrit. C. q. f. d.

*N.271.
*N.182.
*N.177.
*N.182.

THEOREME VII.

285. *Plus un polygone régulier inſcrit*

crit dans un cercle a de côtés, plus ils sont petits, & plus ils s'aprochent de sa circonférence.

DEMONSTRATION.

Si l'on inscrit dans un même cercle deux polygones, dont le nombre des côtés de l'un soit double des côtés de l'autre, comme par exemple, un quarré & un octogone, cette proposition sera évidente; parce que chaque côté du quarré répondra à deux côtés de l'octogone, qui faisant ensemble une ligne courbée, seront plus grands que le côté du quarré qui les soutient *. Mais pour le démontrer généralement, Fi. 230. *N. 20.

Il faut considérer que les côtés des polygones sont les cordes des parties de la circonférence du cercle dans lequel il est inscrit *: Or, plus le polygone a de côtés, plus ces parties sont en grand nombre, & conséquemment plus elles sont petites: Donc les côtés du polygone qui les soutiennent ou qui leur servent de cordes, sont aussi plus petits; mais plus les cordes sont petites dans un cercle ou dans des cercles égaux, plus elles sont éloignées du centre du cercle *: Donc plus elles s'approchent de sa circonference. *N. 279. *N. 278.

COROLLAIRE.

Il ſuit de-là,

286. *Que plus un polygone inſcrit dans un cercle a des côtés, plus ſa circonference eſt grande.*

Car il eſt évident que la circonférence du cercle ſera toujours plus grande que celle du polygone inſcrit, puiſque ſes côtés étant des lignes droites, ſont plus petits que les arcs qu'ils ſoutiennent; mais plus il a de côtés, plus il approche de la circonférence du cercle, ou, moins il en differe: Donc il eſt plus grand: Donc, &c.

THEOREME VIII.

287. *Plus un polygone régulier circonſcrit à un cercle a de côtés, plus ſa circonférence eſt petite.*

DEMONSTRATION.

Fi. 138. Cette propoſition paroîtra évidente, ſi l'on circonſcrit à un cercle deux polygones, dont le nombre des côtés de l'un ſoit double des côtés de l'autre,

par exemple, un quarré & un octogone ; comme le quarré ABCD & l'octogone *abcd*, &c. car il eſt clair que le côté *ab* de l'octogone eſt plus petit que les deux parties *a*A, A*b* du quarré ; qu'il en eſt de même à tous les autres angles de ce quarré AD, & que le reſte de l'octogone eſt commun aux deux polygones. D'où il ſuit, que la circonférence du quarré eſt plus grande que celle de l'octogone. Mais pour le démontrer généralement,

Il faut conſiderer que la circonférence du polygone régulier circonſcrit eſt toujours plus grande que celle du cercle par cet axiome, que *ce qui contient eſt plus grand que ce qui eſt contenu*; que chaque côté du polygone circonſcrit touche le cercle dans l'extrémité du rayon droit, c'eſt-à-dire, par le milieu *; mais que plus les côtés du polygone ſont petits, moins ils s'éloignent de ce point de part & d'autre, ou ce qui eſt la même choſe, plus leurs extrémités s'approchent de la circonférence du cercle : Or, plus elles s'en approchent, moins la ſomme des côtés du polygone differe de la circonférence du cercle, c'eſt-à-dire, plus elle eſt petite ; mais cette ſomme en approche d'autant plus que les côtés du po- *N. 230.

lygone ſont petits, c'eſt-à-dire, qu'ils ſont en plus grand nombre : Donc, &c.

REMARQUE.

288. Il eſt évident que la circonférence du cercle contenant celle du polygone inſcrit, & étant renfermée dans le circonſcrit, elle eſt plus grande que la circonférence du premier polygone, & plus petite que celle du ſecond : Mais comme ces polygones approchent d'autant plus du cercle qu'ils ont un plus grand nombre de côtés *; ſi on ſuppoſe le nombre de ces côtés infini, ils ſe confondront alors avec le cercle, dont la circonférence peut ainſi être conçue comme compoſée d'une infinité de côtés infiniment petits. Dans cette ſuppoſition, le cercle devient un polygone régulier d'une infinité de côtés : C'eſt pourquoi tout ce que l'on démontrera dans la ſuite ſur les polygones réguliers, pourra s'attribuer pareillement au cercle, conſideré auſſi comme polygone.

*N. 285. & 287.

THEOREME IX.

Fig. 139. 289. *Tout polygone régulier ou irrégulier Z, peut être partagé par des li-*

gnes tirées d'un de ſes angles D à ſes autres angles A & B, &c. en autant de triangles DFA, DAB, &c. qu'il a de côtés, moins deux côtés.

DEMONSTRATION.

Conſiderez qu'il faut néceſſairement deux côtés du polygone pour avoir le premier triangle DFA, de même que le dernier DEC, & que les autres triangles ſont compoſés d'un ſeul côté du polygone, & des lignes DA, DB, &c. tirées en dedans le polygone. D'où il ſuit, que ſi l'on retranche de la circonférence du polygone les deux côtés DF, & DE qui forment l'angle FDE, du ſommet duquel on a tiré les lignes DA, DB, &c. le reſte des côtés du polygone donnera le nombre des triangles dans leſquels il aura été partagé : Donc il y en aura autant que le polygone a de côtés, moins deux côtés : Donc, &c.

COROLLAIRE.

Il ſuit de cette propoſition que

290. *Les angles de tout polygone ſont égaux, pris enſemble, à deux fois autant d'angles droits que le polygone a de côtés, moins deux.*

Car on vient de voir que tout polygone peut ſe partager en autant de triangles qu'il a de côtés, moins deux : Or, les angles de chacun de ces triangles ſont formés de tous ceux du polygone, & ils valent deux droits* : Donc les angles du polygone valent deux fois autant d'angles droits qu'on y peut former de triangles par des lignes tirées d'un de ſes angles, c'eſt-à-dire, deux fois autant qu'il a de côtés, moins deux. C. q. f. d.

*N. 177.

PROBLEMES.

I.

291. *Inſcrire un quarré dans un cercle donné.*

RESOLUTION.

Fi. 140. Soit le cercle donné Z, dont le centre eſt C : tirez deux diamétres AB, DE qui ſe coupent perpendiculairement en C ; ils diviſeront la circonférence du cercle Z en quatre parties égales : Tirez les cordes AD, DB, &c. de chacune de ces parties, & vous aurez le quarré ADBE.

DEMONSTRATION.

Les lignes AD, DB, &c. ſont éga-

les, étant cordes d'arcs égaux *, & les * N. 50.
angles ADB, DBE, &c. qui ont leur sommet à la circonférence du cercle, & qui s'appuyent sur un diamétre, sont droits * : Donc, &c. * N. 160.

II.

292. *Inscrire un octogone régulier dans un cercle donné.*

RESOLUTION.

Inscrivez-y d'abord un quarré par le problême précédent, & divisez chaque arc que soutient le côté du quarré, en deux également : Tirez ensuite des lignes droites d'une division à l'autre, & vous aurez l'octogone demandé ; ce qui est évident. Fi. 141.

III.

293. *Inscrire un exagone dans un cercle donné, dont le centre est C.* Fi. 142.

RESOLUTION.

Tirez le rayon CA du cercle, & le portez six fois sur sa circonférence, il la divisera en six parties égales ; c'est ce

qui eſt évident par la propoſition du n. 284.

I V.

294. *Inſcrire un dodécagone dans un cercle.*

RESOLUTION.

Diviſez d'abord la circonférence du cercle en ſix parties égales, comme pour y inſcrire l'exagone ; coupez enſuite chaque diviſion en deux également, & tirez des lignes droites d'une diviſion à l'autre, elles donneront le dodécagone inſcrit au cercle.

V.

295. *Dans un cercle donné, inſcrire un triangle équilatéral.*

Fig. 143. Il faut diviſer ſa circonférence en ſix parties égales, comme pour y inſcrire un exagone, & tirer enſuite des lignes droites de la premiere diviſion à la troiſiéme, de celle-ci à la cinquiéme, & de la cinquiéme à la premiere, & l'on aura le triangle équilatéral 1, 3, 5, inſcrit au cercle ; car chaque angle, comme *a*, ayant pour meſure la moitié des deux ſixiémes

ſixiémes parties de la circonférence ſur leſquelles il s'appuye, c'eſt-à-dire, un tiers de la demie *, il ſera de 60 degrés: Donc, &c. *N. 157.

PROBLEME VI.

296. *Inſcrire un polygone régulier quelconque dans un cercle.*

Trouvez d'abord l'angle du centre de ce polygone, en diviſant 360 degrés par le nombre de ſes côtés *: tirez enſuite deux rayons qui faſſent enſemble un angle égal à celui du centre du polygone: la corde de l'arc compris entre ces deux rayons, ſera le côté du polygone demandé, car elle ſera la corde de la cinquiéme partie de la circonférence, s'il s'agit d'un pentagone, de la ſixiéme s'il s'agit d'un exagone, &c. * Ainſi portant cette corde ſur la circonférence du cercle, elle la diviſera en autant de parties égales que le polygone doit avoir de côtés. Ce qui eſt évident. *N. 271. *N. 279.

Pour inſcrire, par exemple, un décagone dans un cercle donné Z, dont le centre eſt C; on cherchera l'angle du centre de ce polygone en diviſant 360 degrés par 10, c'eſt-à-dire, par le nombre des côtés du polygone; le quotient donnera 36 degrés pour la valeur de cet Pl. 144.

angle : on tirera enſuite les deux rayons CA, CB, de maniere qu'ils faſſent l'angle ACB de 36 degrés ; la corde AB de cet angle étant portée ſur la circonférence du cercle Z, la diviſera en 10 parties égales : Ainſi tirant des lignes droites d'une diviſion à l'autre, on aura le décagone demandé.

On inſcrira de même dans tout cercle donné, tel autre polygone régulier qu'on voudra.

REMARQUES.

I.

297. La méthode qu'on vient de donner dans ce dernier problême, pouvant s'appliquer généralement à tous les polygones, fait voir qu'il y a différentes manieres de diviſer la circonférence du cercle en pluſieurs parties égales : Mais il faut obſerver que celle-là ſeule ſe nomme *Géométrique*, qui fait ſeulement uſage de la regle & du compas, & que les autres qui preſcrivent du tatonnement ou d'autres inſtrumens, tel que le rapporteur (que la méthode que l'on vient de donner exige pour faire l'angle ACB de la valeur de l'angle du centre du polygone) ſont nommées *méchaniques*.

Ainſi la réſolution des cinq premiers problêmes de cet article eſt géométrique, & celle du ſixiéme eſt méchanique.

II.

298. Lorſque l'on a un polygone régulier inſcrit dans un cercle, on peut toujours y inſcrire géométriquement un polygone qui ait le double de côtés, en coupant chaque angle du centre en deux parties égales, ce que l'on peut continuer à l'infini; comme auſſi lorſque l'on a un polygone régulier d'un nombre de côtés pair inſcrit dans un cercle, on peut y inſcrire un polygone qui ait la moitié des côtés du premier, en tirant des lignes de la premiere diviſion à la troiſiéme, de celle-ci à la cinquiéme, &c. ainſi qu'on l'a fait pour inſcrire dans un cercle un triangle équilatéral par le moyen de l'exagone, n. 295.

III.

299. Tous les polygones réguliers ne peuvent pas s'inſcrire géométriquement dans le cercle, tels ſont l'eptagone, l'enéagone, l'endécagone, &c. & cela, parce qu'on ne peut diviſer géométriquement un arc ou la circonférence du cercle en tel nombre de parties impair

que l'on veut. Ainſi ces polygones ne peuvent être inſcrits dans le cercle que par des moyens méchaniques, c'eſt-à-dire, par la méthode du dernier problême, ou par le tatonnement, en portant une ouverture de compas ſur la circonférence, & l'augmentant ou diminuant, juſqu'à ce que cette ouverture diviſe la circonférence du cercle en autant de parties égales que le polygone doit avoir de côtés; ou bien en ſe ſervant du compas de proportion, inſtrument dont on a déja parlé. En voici la méthode en peu de mots; on en trouvera la démonſtration dans *l'Arithmetique & la Géométrie de l'Officier.*

PROBLEME VII.

300. *Maniere d'inſcrire un polygone régulier quelconque dans un cercle, par le moyen du compas de proportion.*

On trouve ſur chaque branche du compas de proportion, & du même côté, deux lignes, le long deſquelles eſt écrit les *polygones.* Ils y ſont marqués depuis le triangle ou le *trigone*, juſqu'au dodécagone.

Pour inſcrire un polygone dans un

cercle avec cet instrument, il faut prendre avec le compas commun, la grandeur du rayon du cercle, & la porter sur la ligne des polygones du compas de proportion. Il le faut ouvrir de maniere que la distance de 6 à 6 de cette ligne, soit égale au rayon du cercle proposé. Ce compas restant ainsi ouvert, si on veut inscrire un eptagone dans le cercle donné, on prendra avec le compas ordinaire l'intervalle de 7 à 7 de la ligne des polygones, marquée sur chaque regle ou branche du compas de proportion; de 9 à 9, si l'on veut inscrire un ennéagone; de 11 à 11, si c'est un endécagone, &c. Ces intervalles étant portés sur la circonférence du cercle, la diviseront en 7, 9, 11, &c. parties égales.

Si le rayon du cercle donné est trop grand pour pouvoir être porté sur la ligne des polygones, c'est-à-dire, si l'intervalle de 6 à 6 des deux lignes des polygones est dans la plus grande ouverture du compas de proportion, moindre que le rayon du cercle donné; on décrira du centre de ce cercle un autre cercle plus petit, dans lequel on inscrira le polygone demandé; les rayons obliques de ce polygone étant prolongés jusqu'à la circonférence du grand cercle, la di-

viseront en autant de parties égales que le polygone doit avoir de côtés.

PROBLEME VIII.

301. *Un cercle étant donné, lui circonscrire un polygone régulier quelconque.*

Fig. 145. Soit le cercle Z, dont le centre est C, auquel il faut circonscrire un polygone régulier quelconque, par exemple un octogone.

RESOLUTION.

On inscrira d'abord un octogone dans
Fig. 292. le cercle Z*: On prolongera son rayon droit CD jusqu'à la circonférence du cercle en E; on menera par ce point une tangente au cercle, qui sera terminée de part & d'autre en F & en G par le prolongement des rayons obliques CA, CB: on décrira ensuite du centre C & du rayon CF, ou CG un nouveau cercle, dont FG sera la huitiéme partie; enforte que portant cet intervalle sur sa circonférence, il la divisera en huit parties égales; les cordes de chacune de ces parties étant tirées, donneront l'oc-

togone circonſcrit au premier cercle. Ce qui eſt évident, par ce qui a été expliqué, n. 348.

PROBLEME IX.

302. *Un polygone étant inſcrit dans un cercle, en circonſcrire un autre au même cercle d'un même nombre de côtés.*

Ce problême s'exécutera de la même maniere que le précédent.

PROBLEME X.

303. *Décrire un polygone régulier quelconque, dont le côté ſoit égal à une ligne donnée.*

Soit la ligne donnée AB ſur laquelle on veut décrire un polygone quelconque, par exemple un octogone. Fi. 146.

RESOLUTION.

Il faut commencer par trouver l'angle du centre de l'octogone, & cela, en diviſant 360 par *8; on aura 45 degrés pour la valeur de cet angle; on ôtera 45 degrés de 180, le reſte 135 ſera *N. 271.

l'angle de la circonférence de l'octogone *.

*N.275. & 276.

Ce petit calcul étant fait, on fera aux points A & B des angles BAC, CBA égaux chacun à la moitié de 135 degrés ou de l'angle de la circonférence de l'octogone, c'eſt-à-dire de 67 degrés 30 minutes; les côtés de ces angles étant prolongés, ſe couperont dans un point C, qui ſera le centre du polygone demandé *: Enſorte que ſi de ce point pris pour centre, & de l'intervalle CA ou CB on décrit un cercle, le côté AB diviſera ſa circonférence en huit parties égales.

*N.274.

REMARQUES.

I.

304. Par ce problême, on peut conſtruire ſur le terrain un polygone régulier quelconque, dont le côté ait un nombre de toiſes fixé ou déterminé.

Car il n'y a qu'à décrire ſur un plan, par le moyen d'une échelle bien exacte, le polygone qu'on veut tracer ſur le terrain, donnant à ſon côté autant de toiſes de l'échelle qu'il doit en avoir ſur le terrain, alors il ſera aiſé de connoître avec l'échelle la grandeur du rayon de ce polygone.

Cette grandeur étant connue, on se transportera sur le terrain avec le demi-cercle, & supposant que C soit choisi pour le centre du polygone, on fera avec cet instrument les angles ACB, BCD, &c. égaux aux angles du centre du polygone; & faisant les côtés CA, CB, CD, &c. de ces angles, égaux au nombre de toises des rayons obliques du polygone mesurés sur l'échelle du plan, les lignes AB, BD, &c. tirées par les extrémités des rayons obliques, donneront les côtés du polygone demandé. Ce qui est évident. Fi. 147.

II.

305. Au défaut du demi-cercle, on peut résoudre le même problême avec la planchette, dont on a déja parlé n. 104 & suivans.

Il s'agit d'avoir le polygone qu'on veut tracer sur le terrain, exactement dessiné sur le papier, comme dans la remarque précédente, par le moyen d'une échelle: il faut l'attacher sur la planchette & la mettre au point C, où doit être le centre du polygone; mettre ensuite une épingle bien perpendiculairement sur la planchette, au centre C du polygone, Fi. 148.

& de même à tous ſes angles A, B, D, &c.

Cela fait, il faut faire planter des piquets dans la campagne, dans l'alignement des deux épingles qui donnent les rayons obliques du polygone, & faire meſurer ſur ces alignemens, les lignes C*a*, C*b*, C*d*, &c. égales au nombre de toiſes que les rayons obliques doivent avoir ſur le terrain; les lignes, comme *ab*, *bd*, &c. tirées par les extrémités de ces rayons, donneront les côtés du polygone.

III.

Pl. 146. 306. Si une ligne, comme AB étoit donnée ſur le terrain pour le côté d'un polygone régulier, & que le milieu de ce polygone ſe trouvât embarraſſé de maiſons au autrement, on pourroit circonſcrire, pour ainſi dire, le polygone autour de cet eſpace, en faiſant au point B avec la ligne AB, l'angle ABC égal à l'angle de la circonférence du polygone, & enſuite BC égal à AB; puis au point C, un autre angle égal encore au précédent, & CD à AB ou BC, & continuer ainſi l'opération, juſqu'à ce que le dernier côté du polygone ſe réuniſſe avec le premier au point A.

Cette opération demande une grande exactitude dans la mesure des angles, elle ne peut se faire avec précision sur le terrain, qu'avec un instrument dont les degrés soient assez grands pour être divisés de cinq en cinq minutes, ou au moins de 10 en 10.

PROBLEME XI.

307. *Faire une figure égale & semblable à une figure donnée ABCDE, ou, ce qui est la même chose, qui ait le même nombre de côtés, & le même nombre d'angles égaux, chacun à chacun; ensorte que ces deux figures étant posées l'une sur l'autre, puissent se couvrir exactement.* Pl. 149

RESOLUTION.

Il faut partager en triangles la figure donnée, & cela, par des lignes tirées d'un de ses angles D aux autres angles A & B.

On tirera après cela une ligne *ab* égale à AB, sur laquelle on construira le triangle *adb* égal à ADB: On fera ensuite sur *bd* le triangle *dcb* égal à DCB, & enfin sur *ad* le triangle *aed* égal au trian-

gle AED ; ce qui étant fait, il eſt évident que les trois triangles, qui compoſent le polygone *abcde*, ſont égaux aux trois qui compoſent le propoſé ABC-
FIG. 190. DE *, & qu'ainſi ces deux figures ou ces deux polygones, ſont égaux.

PROBLEME XII.

308. *Faire le plan d'un polygone quelconque, donné ſur le terrain.*

On appelle le *plan* d'une figure ou d'un polygone tracé ſur le terrain, un deſſein qui le repréſente en petit, & qui en fait connoître toutes les dimenſions.

FIG. 150. Soit le polygone ABCDE un terrain quelconque, dont on veut faire ou *lever* le plan, c'eſt-à-dire, prendre toutes les meſures néceſſaires pour le deſſiner ſur le papier.

RESOLUTION.

On le partagera en triangles par des lignes imaginaires tirées d'un de ſes angles D, aux autres angles, comme dans le problême précédent.

On fera à vûe ſur un papier, une quiſſe ou brouillon de la Figure ; on y

marquera toutes les lignes imaginées tirées dans le polygone, & qui le partagent en plusieurs triangles. On mesurera toutes ces lignes sur le terrain, de même que celles qui forment le contour ou la circonférence du polygone, & l'on écrira leur valeur sur chacune des mêmes lignes marquées dans le brouillon.

Pour mettre ce brouillon ou mémorial au net, on fera d'abord une échelle, dont la grandeur sera relative à celle qu'on veut donner au plan; on construira avec cette échelle des triangles sur le papier, dont les côtés auront autant de toises, piés & pouces de l'échelle, que les côtés de ceux qu'ils représenteront auront été trouvés en avoir du terrain: l'assemblage de tous ces triangles donnera le plan du terrain ou sa figure réduite en petit.

Par exemple, supposons qu'ayant mesuré le côté AB on l'ait trouvé de 100 toises, le côté AD de 60, & BD aussi de 100 toises.

Pour rapporter ce triangle sur le papier, on fera une échelle sur laquelle on prendra 100 toises, qu'on portera sur une ligne indéfinie de *a* en *b*: On prendra après cela 60 toises de la même échelle pour le côté AD; puis du point

a, pris pour centre, & de l'intervalle de 60 toises, on décrira un arc indéfini vers *d*; & comme le côté BD du triangle ADB est aussi de 100 toises, on prendra 100 toises sur l'échelle, du point *b* pris pour centre, & de cet intervalle on décrira un second arc qui coupera le premier dans un point *d*, duquel tirant les lignes *da*, *db*, on aura le triangle *adb* du papier qui répondra au triangle ADB du terrain.

On rapportera de la même maniere les deux autres triangles AED, BDC, & l'on aura le plan *abedea* du polygone proposé ABCDEA.

REMARQUE.

Fi. 150. 309. Si l'on ne peut pas entrer dans le polygone ABCDEA pour en lever le plan, on pourra le prendre en dehors, en mesurant tous ses côtés AB, BC, &c. & tous les angles ABC, BCD, &c. qu'ils font entr'eux.

Pour rapporter sur le papier le mémorial ou le brouillon de l'opération, on tirera une ligne *ab* à laquelle on donnera la même quantité de toises de l'échelle, que la ligne AB a été trouvée en avoir sur le terrain; à ses extrémités *a* & *b* on

fera des angles *abc*, *bae* égaux aux angles ABC, BAE du terrain, & l'on donnera aux lignes *ae*, *bc* la quantité des toises, des lignes AE, BC. Au point *c* on fera l'angle *bcd* égal à BCD, puis le côté *cd* égal à CD; étant parvenu en *d*, on fera l'angle *cde* égal à CDE, & le côté *de*, égal au côté DE du terrain; & enfin en tirant *ea* on aura le plan *abcdea* pris ou levé extérieurement, & rapporté sur le papier.

C'est ainsi qu'on peut lever le plan d'un bois ou de quelqu'autre figure dans laquelle on ne peut entrer.

Maniere d'examiner si l'on ne s'est point trompé dans la mesure des angles de la circonference d'une figure dont on leve le plan.

Pour vérifier si l'on ne s'est point trompé en mesurant les angles du polygone,

Il faut les additionner tous ensemble, & voir si leur somme donne deux fois autant d'angles droits que le polygone a de côtés, moins deux. * *N. 290.

Par exemple, dans le polygone ABCDEA qui a cinq côtés, la somme de ses angles doit valoir six angles droits, Fi. 150.

ou 540 degrés ; de ſorte que ſi en les additionnant, on trouve une quantité plus ou moins grande de degrés, c'eſt une marque qu'il y a de l'erreur dans leur meſure : alors il faut les meſurer de nouveau, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à trouver pour leur ſomme le nombre 540, qu'ils doivent donner.

REMARQUE.

Fi. 151. 310. Il faut obſerver que cette vérification ne peut ainſi ſe faire, que lorſque les angles du polygone ſont tous ſaillans. Lorſqu'il y en a de rentrans, comme l'angle ABC dans le polygone Z, il faut, au lieu de l'angle ABC, comprendre dans la ſomme des angles de ce polygone la quantité des degrés dont ABC differe de la circonférence ou de 360 degrés.

Suppoſant, par exemple, que l'angle ABC ait été meſuré de 80 degrés, on ôtera 80 de 360, & on ajoutera le reſte 280 à la ſomme de tous les autres angles du polygone, alors tous ſes angles doivent valoir deux fois autant d'angles droits qu'il a de côtés, moins deux.

S'il y avoit pluſieurs angles rentrans dans

dans le polygone, on feroit pour chacun d'eux ce que l'on vient de prescrire pour l'angle ABC.

311. Comme il est fort aisé de se tromper en voulant lever le plan d'une figure par le moyen de ses angles, on ne le fait guéres que lorsqu'on ne peut entrer dans la figure : quand on le peut, voici la maniere dont on y procede ordinairement.

Soit le polygone irrégulier ABCD, &c. dont on veut lever le plan, & dans lequel on suppose qu'on peut entrer.

On tirera dans le polygone une ligne AH selon sa plus grande dimension, elle s'appellera *la base*. Pl. 152.

De tous les angles saillans & rentrans du polygone, on fera tomber de part & d'autre sur cette base des perpendiculaires BO, CP, DQ, &c. autant qu'il sera nécessaire ; la figure sera alors partagée en trapezes, triangles, &c.

Il faudra mesurer la base AH, & toutes ses parties AO, OP, &c. de même que toutes les perpendiculaires, dont il faudra écrire la valeur sur l'esquisse ou le brouillon du plan.

Pour rapporter ce brouillon sur le papier, on fera d'abord une échelle, & on tirera une ligne *ah* pour la base du plan :

on lui donnera autant de toises de l'échelle que AH s'est trouvée en contenir sur le terrain.

On prendra ensuite *a o* du nombre de toises, piés & pouces de AO, mesurés sur le terrain. Au point *a* on élevera la perpendiculaire *o b*, & on lui donnera autant de toises de l'échelle que OB en contient du terrain.

On fera après cela *o p* du même nombre de toises que OP, & on élevera au point *p* la perpendiculaire *p c* égale aux toises de PC, & l'on continuera ainsi l'opération, jusqu'à ce que l'on ait élevé de part & d'autre de *a h* autant de perpendiculaires qu'il y en a de part & d'autre de la base AH du plan, espacées comme sur ce plan, & de la même quantité de toises de l'échelle qu'elles ont de toises sur le terrain: on tirera ensuite des lignes qui joindront toutes les extrémités de ces perpendiculaires, & l'on aura le plan de ce polygone ABCD, &c. rapporté ou déssiné sur le papier.

Les perpendiculaires BO, CP peuvent se tracer sur le terrain avec le demi-cercle, comme on l'a dit n. 124.

312. La méthode que l'on vient de donner peut servir aussi pour lever le plan d'un mur qui a plusieurs angles, &

qui a même des parties courbes, comme des tours, &c.

Car soit le mur AB; on tirera vis-à-vis une base CD, sur laquelle on fera tomber des perpendiculaires de tous les angles du mur, & de toutes ses parties courbes. On fera ensuite sur le papier une figure semblable, de la même maniere que dans l'exemple précédent; ce qui n'a pas besoin d'un plus grand détail. Fi. 153.

313. On observera seulement que les parties courbes seront déterminées d'autant plus exactement, qu'on prendra des points plus proche les uns des autres, sur ces parties, pour, de ces points, faire tomber des perpendiculaires sur la base.

314. On aura encore de la même maniere les sinuosités d'une riviere, ou le contour d'un bois, comme on le voit, Fig. 154. Fi. 154.

315. On peut aussi avoir le plan d'une figure fort irréguliere, dans laquelle on ne peut ou veut entrer, & dont le terrain des environs est d'un accès facile, en inscrivant la figure dans un rectangle ou dans un autre polygone quelconque, & en tirant ensuite de toutes ses parties saillantes & rentrantes, des perpendiculaires sur les côtés du rectangle. Fi. 155.

ou du polygone : Tel eſt, par exemple, le polygone irrégulier X renfermé dans le rectangle *a b c d*.

La maniere de rapporter cette figure ſur le papier eſt trop aiſée pour la détailler ici ; elle doit ſe concevoir ſans aucune difficulté, après tout ce qui a été dit ci-devant ſur ce ſujet.

Des differentes manieres de repréſenter un objet propoſé.

316. Après avoir parlé du plan, il paroît convenable de donner une idée des autres deſſeins dont on ſe ſert dans l'architecture, tant civile que militaire, pour repréſenter toutes les parties des ouvrages conſtruits ou qu'on veut conſtruire.

317. *Le plan* dont on a déja parlé, peut ſe conſiderer comme le deſſein de la coupe d'un ouvrage faite parallelement à l'horiſon, un peu au-deſſus du rez de chauſſée. Si on ſuppoſe un bâtiment, dont tous les murs ſoient élevés de deux ou trois piés au-deſſus du rez de chauſſée ; le deſſein de ce bâtiment, dans cet état, en ſera le plan. Il fera voir la diſtribution de toutes les parties du terrain, l'épaiſſeur des murs, &c.

318. *Le profil* eſt un deſſein qui repréſente la coupe d'un ouvrage, faite perpendiculairement à l'horiſon. Il ſert à faire connoître la hauteur de toutes les parties de l'ouvrage, qui ſe trouvent dans la coupe, de même que la profondeur de celles qui ſont au-deſſous de l'horiſon. Il ſuit de cette définition, que le profil varie, ſuivant les différentes coupes qu'on imagine dans l'ouvrage, & que pour en bien connoître toutes les parties, il faut des profils pris de différens ſens.

319. *L'élevation* eſt le deſſein de la partie extérieure d'un ouvrage.

320. Le plan, le profil, & l'élevation, ſont néceſſaires pour faire connoître exactement la diſtribution & la ſituation de toutes les parties d'un ouvrage. Les deux premiers le ſont le plus indiſpenſablement, & ils ſont preſque ſeuls en uſage dans la fortification.

321. Il y a encore une quatriéme méthode pour repréſenter un objet; elle ſe nomme *perſpective*: c'eſt la repréſentation de l'objet tel qu'il paroit, vû d'une certaine diſtance. Ce deſſein ne repréſente pas toutes les parties des ouvrages dans leur grandeur naturelle, il fait ſeulement juger de l'effet qu'elles font en-

semble ; ainsi il ne sert pas à le faire connoître exactement : par cette raison, on ne s'en sert guéres dans les ouvrages de la fortification.

XII.

De la Planimétrie ou mesure des surfaces planes.

322. LA PLANIMETRIE est la partie de la Géométrie qui enseigne à mesurer *la superficie* des figures planes ; cette superficie se nomme aussi *l'aire* ou *la surface* de ces figures.

323. Comme les lignes se mesurent avec d'autres lignes plus petites, comme avec la toise, le pied, &c. de même les superficies se mesurent avec d'autres superficies déterminées, comme *la toise quarrée*, *le pied quarré*, &c.

324. Une toise quarrée est un quarré, dont chaque côté est d'une toise, & un pied quarré un quarré dont chaque côté est d'un pied, & de même pour toutes les autres mesures quarrées.

On verra bientôt ce qui a fait choisir le quarré pour mesurer les surfaces pla-

sérablement aux autres figures.

Proposition fondamentale pour la mesure des surfaces.

THEOREME I.

325. *La surface de tout rectangle, comme ABCD, est égale au produit d'un de ses côtés AB, par l'autre côté AD ou BC, qui fait un angle droit avec le premier.*

DEMONSTRATION.

Il faut considerer le rectangle ABCD comme rempli d'une infinité de lignes égales & paralleles à AB, ou plutôt de petits parallelogrammes d'une hauteur infiniment petite, & qui ont tous pour base des lignes égales & paralleles à AB; il faut concevoir qu'ils se touchent sans aucun intervalle; alors on verra qu'on en peut seulement imaginer autant qu'il y a de points dans la hauteur AC ou BD du rectangle ABDC. Ainsi si on suppose, par exemple, cent mille points dans cette hauteur, la ligne AB étant ajoutée cent mille fois à elle-même, ou prise autant de fois qu'il y a de points Pl. 156.

dans BD, donnera le rectangle AD; mais multiplier une quantité par une autre, *c'eſt prendre la premiere autant de fois que l'unité eſt contenue dans la ſeconde :* Donc prendre AB autant de fois qu'il y a de points ou d'unités dans BD, c'eſt multiplier AB par BD: Donc en multipliant AB par BD, on a le produit du rectangle AD : Donc la ſurface d'un rectangle eſt égale au produit d'un de ſes côtés par l'autre. C. q. f. d.

THEOREME II.

Fi. 157. 326. *Si l'on multiplie les toiſes de la baſe d'un rectangle AC par celles de ſa hauteur BC ou AD, le produit donnera la quantité de toiſes quarrées que contiendra le rectangle.*

Soit le côté AB de ſept toiſes, on le diviſera en toiſes, c'eſt-à-dire, en ſept parties égales, & par l'extrémité de chacune de ces parties, on menera des paralleles à AD ou BC, elles ſeront toutes perpendiculaires ſur AB *; ainſi elles formeront ſept rectangles qui auront chacun une toiſe pour baſe, & pour hauteur celle du rectangle, c'eſt-à-dire, AD ou AC.

*N. 134.

Soit

Soit ſuppoſé auſſi que BC eſt de ſix toiſes, & que par l'extrémité de chacune de ces toiſes, on mene des paralleles à la baſe AB du rectangle AC; il eſt évident que ces paralleles diviſeront les ſept premiers rectangles en ſix parties égales, c'eſt-à-dire, en ſix toiſes quarrées; car chacune de ces parties a une toiſe de baſe, & une toiſe de hauteur: il y aura donc dans le rectangle AC ſept fois ſix toiſes quarrées, c'eſt-à-dire, quarante-deux; mais ce nombre eſt le produit des toiſes de la baſe du rectangle AC par celles de ſa hauteur BC: Donc &c.

COROLLAIRE.

327. *Il ſuit de-là, que pour avoir la ſurface d'un quarré, il faut multiplier ſa baſe, ou un de ſes côtés par lui-même.*

Car le quarré peut être conſideré comme un rectangle qui a ſes quatre côtés égaux: Or, pour avoir la ſurface de ce rectangle, il faut multiplier ſa baſe par ſa hauteur *; mais ces deux lignes ſont égales dans le quarré: Donc, &c. *N. 325.

REMARQUES.

I.

328. Lorſque l'on multiplie deux lignes, qui font enſemble un angle droit, ou, ce qui eſt la même choſe, lorſque l'on multiplie les nombres qui expriment la valeur de ces lignes, leur produit donne la ſurface d'un rectangle qui auroit ces lignes pour côtés; & de même lorſqu'on multiplie un nombre par lui-même, ſon produit donne la ſurface d'un quarré qui auroit ce nombre pour côté.

D'où il ſuit, qu'une toiſe quarrée ayant ſix pieds de baſe, & autant de hauteur, contient ſix fois ſix pieds quarrés, c'eſt-à-dire trente-ſix, & qu'un pied quarré ayant douze pouces de baſe, & autant de hauteur, contient douze fois douze pouces quarrés, c'eſt-à-dire 144, &c. Ainſi pour réduire ou changer des toiſes quarrées en pieds quarrés, il faut les multiplier par trente-ſix, & pour ſçavoir le nombre de toiſes quarrées que valent des pieds quarrés, il faut les diviſer par trente-ſix: il en eſt de même pour les pouces quarrés qu'on change en pieds quarrés, en les diviſant par 144, ou

pour les pieds quarrés qu'on réduit en pouces auſſi quarrés, en les multipliant par le même nombre 144.

II.

329. La toiſe quarrée, le pied quarré, &c. ſe diviſent dans le calcul en même nombre de parties que la toiſe lineaire, c'eſt-à-dire, qui n'a que de la longueur, le pied lineaire, &c.

Ainſi la toiſe lineaire ſe diviſant en ſix parties égales, appellées pieds, la toiſe quarrée ſe diviſe auſſi en ſix parties égales, qu'on appelle *pieds courant ſur toiſe.*

Le pied courant ſur toiſe eſt un rectangle qui a une toiſe de baſe, & un pied de hauteur: Ainſi il contient ſix pieds quarrés. Il eſt évident que la toiſe quarrée contient ſix de ces pieds.

Le pied courant ſur toiſe ſe diviſe comme le pied lineaire, en douze parties égales, appellées *pouces courant ſur toiſe.* Ce ſont des rectangles d'une toiſe de baſe, & d'un pouce de hauteur, dont par conſéquent douze ſont le pied courant ſur toiſe.

Le pouce courant ſur toiſe ſe diviſe auſſi en *douze lignes courant ſur toiſe;*

ce ſont des rectangles d'une toiſe de baſe, & d'une ligne de hauteur.

Le pied quarré ſe diviſe comme le pied lineaire en douze parties égales, appellées *pouces courant ſur pied* ; ce ſont des rectangles d'un pied ou douze pouces de baſe, & d'un pouce de hauteur.

Le pouce quarré ſe diviſe auſſi en douze *lignes courant ſur pouce*, qui ſont des rectangles d'un pouce de baſe, & d'une ligne de hauteur.

Cette diviſion des meſures quarrées en même nombre de parties égales que les meſures lineaires, donne une grande facilité dans le calcul des ſuperficies, lorſque les toiſes ſont accompagnées de pieds, pouces, &c. On va le voir dans l'exemple qu'on va donner ici de la multiplication de deux dimenſions compoſées de toiſes, pieds & pouces.

330. *Maniere de multiplier des toiſes, des pieds & des pouces, par des toiſes, des pieds & des pouces.*

Pl. 158. Soit le rectangle ABCD, dont la baſe AB ſoit de 15 toiſes cinq pieds ſept pouces, & la hauteur BC de 13 toiſes quatre pieds dix pouces ; pour en avoir

la ſuperficie, il faut multiplier ces deux lignes l'une par l'autre.

Pour cela on poſera d'abord celui de ces deux nombres qu'on voudra, par exemple, celui qui exprime la valeur de AB, & l'on écrira deſſous celui de la valeur de BC.

On enfermera les cinq pieds ſept pouces du multiplicande par une eſpece de crochet, comme on le voit dans l'exemple figuré; & l'on fera la multiplication des 15 toiſes reſtant par le multiplicateur 13 toiſes, 4 pieds, 10 pouces, comme on l'a enſeigné dans l'article de la multiplication, n. 48 & ſuivans, du Traité d'Arithmetique.

AB. 15t. { 5pies 7pou.
BC. 13—4—10

45
15.

Pour 3 pieds du Multiplicat. 7—3
Pour 1 pied du même..... 2—3
Pour 6 pouces du même.... 1—1— 6
Pour 4 pouces du même.... 0—5— 0
Pour les 3 pieds du Multiplicande..... 6—5— 5
Pour les 2 piés reſtant du même..... 4—3— 7— 4
Pour 6 pouces du même.... 1—0—10—10
Pour 1 pouce du même..... 0—1— 1— 9— 8

TOTAL..... 219t. 5p. 6p. 11l. 8

Pour cet effet on dira d'abord, trois fois 5 font 15, on posera 5 à la colomne des unités, & l'on retiendra une pour la suivante ; on dira ensuite, trois fois 1 font 3, & 1 de retenu font 4, & l'on posera 4 à la seconde colomne.

Puis passant au second chiffre 1 du Multiplicateur, on dira, une fois 5 est 5, qu'on posera à la seconde colomne, & après cela, une fois 1 est 1, qu'on posera à la troisiéme.

Pour les quatre pieds du Multiplicateur, on prendra d'abord pour trois pieds la moitié des 15 toises du Multiplicande, en disant, la moitié de 15 est 7, qu'on posera à la colomne des unités ; il reste une toise, dont la moitié est 3 pieds courant sur toise, qu'on posera aux pieds, c'est-à-dire, dans la colomne des pieds du Multiplicande & du Multiplicateur.

Pour le pied qui reste, on prendra le tiers de ce que les trois pieds précédens viennent de donner : Ainsi on dira, le tiers de 7 est 2, qu'on posera sous le 7 ; il reste une toise qui vaut 6 pieds courant, lesquels joints avec les trois pieds qui sont à la colomne des pieds & qui viennent du produit précédent, font 9 pieds, dont le tiers est 3 qu'on posera aussi à la même colomne des pieds.

Il reſte à prendre le produit des dix pouces du Multiplicateur.

Pour ſix pouces, on prendra la moitié du produit du pied précédent.

On dira donc, la moitié de 2 eſt 1, qu'on poſera ſous le 2; puis, la moitié de trois pieds eſt un pied, qu'on poſera aux pieds, il reſte un pied dont la moitié eſt ſix pouces courant ſur toiſe.

Pour les quatre pouces qui reſtent, on prendra le tiers du même produit d'un pied, c'eſt-à-dire, de deux toiſes 3 pieds, qui eſt cinq pieds courant ſur toiſe; alors on a tous les différens produits qui formeront celui de 15 toiſes par 13 toiſes 4 pieds dix pouces.

Il s'agit préſentement d'opérer pour les cinq pieds ſept pouces du Multiplicande, qu'on a juſqu'à préſent laiſſé à l'écart, ou qu'on n'a point conſideré.

Leur produit doit ſe prendre ſur tout le Multiplicateur: car il eſt clair que ſi l'on a une ligne BC de 13 toiſes 4 pieds 10 pouces à multiplier par une toiſe, le produit donnera 13 toiſes quarrées, plus 4 pieds courant ſur toiſe, & plus 10 pouces courant ſur toiſe: Or, ſi au lieu d'une toiſe il faut multiplier cette même ligne BC par des parties aliquotes de la toiſe, comme par la moitié ou Pl. 158.

le tiers, &c. il eſt évident que ces parties doivent produire la moitié ou le tiers, &c. de treize toiſes 4 pieds 10 pouces.

Les cinq pieds du Multiplicande n'étant point partie aliquote de la toiſe, ne peuvent ſe prendre tout d'un coup ſur le Multiplicateur : on commencera donc par prendre la moitié de ce Multiplicateur pour trois pieds, & pour cela on dira,

La moitié de 13 eſt 6, & on poſera 6 à la colomne des unités de la toiſe : il reſte une toiſe qui vaut 6 pieds qu'on joindra avec les 4 pieds du Multiplicateur, ce qui donnera dix pieds, dont la moitié eſt cinq pieds courant ſur toiſe : on prendra auſſi de ſuite la moitié des 10 pouces du Multiplicateur, qui eſt 5, qu'on poſera à la colomne des pouces.

Pour les deux pieds reſtant du Multiplicande, on prendra le tiers du Multicateur auſſi tout entier.

Ainſi on dira, le tiers de 13 eſt 4, qu'on poſera aux unités des toiſes : il reſte une toiſe, qui jointe avec les quatre pieds du multiplicateur fait 10 pieds, dont le tiers eſt 3 pouces pour 9 ; il reſte un pied qui vaut douze pouces qu'on ajoute avec les 10 pouces du Multiplicateur, ce qui donne 22 pouces, dont

le tiers eſt 7; il reſte un pouce qui vaut 12 lignes courant ſur toiſe, & dont le tiers eſt quatre lignes de cette eſpece.

Pour les 7 pouces qui reſtent au multiplicande, on prendra pour 6, le quart de ce que le produit précédent de deux pouces a donné.

On dira donc, le quart de 4 toiſes eſt une toiſe, qu'on poſera aux unités des toiſes; puis, le quart de trois pieds eſt zero à la colomne des pieds; mais ces pieds valent 36 pouces courant ſur toiſe, qui joints avec les 7 pouces du même produit de deux pieds, font 43 pouces, dont le quart eſt 10; il reſte 3 pouces qui valent 36 lignes, qui jointes aux 4 lignes du produit de deux pieds, font 40 lignes, dont le quart eſt 10, qu'on poſera à la colomne des lignes.

Il reſte à opérer ſeulement pour 1 pouce, ce qui doit donner la ſixiéme partie du produit de 6 pouces.

Ainſi on dira, la ſixiéme partie d'une toiſe eſt zero, qu'on poſera aux toiſes; mais cette toiſe vaut ſix pieds courant, dont la ſixiéme partie eſt un pied courant ſur toiſe, qu'on poſera aux pieds: il n'y a rien à lui ajouter, parce qu'il n'y a pas de pieds au produit de ſix pouces. On dira enſuite. La ſixiéme partie

de 10 pouces eſt un pouce, qu'on poſera à la colomne des pouces : il en reſtera 4 qui valent 48 lignes, leſquelles jointes avec les 10 lignes du produit de ſix pouces font 58 lignes, dont la ſixiéme partie eſt 9 lignes pour 54 ; il reſte 4 lignes qui valent 48 points, dont la ſixiéme partie eſt 8 points, qu'on poſera à la colomne des points. On additionnera enſuite tous les différens produits qu'on vient de faire ; leur ſomme 219 toiſes quarrées, 5 pieds, 6 pouces, 11 lignes, 8 points courant ſur toiſe, ſera la valeur de la ſurface du rectangle ABCD.

DEMONSTRATION.

Pour le prouver, conſiderez que la baſe AB du rectangle ABCD étant de 15 toiſes 5 pieds 7 pouces ; ſi on prend AE, de 15 toiſes, il reſtera EB de 5 pieds 7 pouces : menez EF parallelement à BG, & prenez EG du nombre des toiſes de BC, c'eſt-à-dire, de 13 ; il reſtera GF de 4 pieds 10 pouces : menez auſſi HG parallele à AB ou à DC.

Cette préparation étant faite ; il eſt évident que le rectangle AG eſt le produit des toiſes de la baſe AB par celles

de BC. Il eſt évident auſſi que le rectangle HF eſt le produit des toiſes de HG (qui eſt égal à AE) par FG, c'eſt-à-dire, par les pieds & par les pouces du Multiplicateur : Or, ſi FG avoit été d'une toiſe, le rectangle HF auroit contenu autant de toiſes quarrées, que la baſe AE ou HG a de toiſes de longueur, c'eſt-à-dire, dans cet exemple 15 toiſes quarrées; ſuppoſant GF de trois pieds : On doit donc avoir la moitié de 15 toiſes quarrées, c'eſt-à-dire, ſept toiſes & demie, comme on l'a trouvé dans le calcul : Un pied de plus de hauteur a donc dû donner le tiers de 7 toiſes 3 pieds; & 10 pouces, la moitié & le tiers du produit d'un pied. Ainſi le rectangle HF eſt compoſé du produit de 15 toiſes par trois pieds, plus du tiers du même produit, & enfin de la moitié & du tiers du produit d'un pied.

Il reſte le rectangle EC qui achêve le rectangle total AC. Il eſt évident qu'il eſt le produit de BC par BE, c'eſt-à-dire, de tout le Multiplicateur 13 toiſes 4 pieds 10 pouces par les cinq pieds 7 pouces du multiplicande AB.

Si BE valoit une toiſe, le rectangle EC contiendroit autant de toiſes quarrées qu'il y en a dans la hauteur BC, &

autant de pieds & de pouces courant ſur toiſe, qu'il y en auroit dans la même hauteur. Or, ſi au lieu d'une toiſe, BE n'avoit que trois pieds, le rectangle EC ſeroit la moitié de 13 toiſes, 4 pieds 10 pouces courant ſur toiſe, le tiers de cette même quantité, s'il n'avoit qu'un pied, &c. ainſi qu'on l'a dit ci-devant.

D'où l'on voit que les pieds & les pouces du multiplicande doivent ſe prendre ſur toutes les parties du Multiplicateur.

On peut donc établir cette régle générale pour toutes les multiplications de cette eſpece.

331. *Qu'il faut prendre les pieds & les pouces, &c. du Multiplicateur, ſur les toiſes du Multiplicande; & les pieds, les pouces, &c. du Multiplicande ſur toutes les parties du Multiplicateur.*

L'exemple précédent, & la démonſtration qu'on vient d'en donner, paroiſſent ſuffiſans pour mettre en état de trouver les produits de tous les différens rectangles qu'on pourra propoſer.

On ajoutera ſeulement, que lorſqu'il y aura des pouces dans le Multiplicateur ou dans le Multiplicande, ſans qu'il y

ait un produit de pieds sur lequel on puisse prendre celui des pouces, on supposera le produit d'un pied ou de deux pieds, comme on suppose dans la multiplication des livres, sols & deniers, le produit d'un sol ou de deux sols pour avoir le produit des deniers, &c.

THEOREME III.

332. *Les parallelogrammes qui ont une même base, & qui sont entre les mêmes paralleles, sont égaux.*

Soient les parallelogrammes ABCD, ABEF qui ont AB pour base commune, & qui sont entre les mêmes paralleles AH, DE; il faut démontrer qu'ils sont égaux. Fig. 159.

DEMONSTRATION.

Considerez que les deux triangles DAF, CBE, sont égaux; car les côtés opposés des parallelogrammes étant égaux *, AD est égal à BC, comme AF l'est à BE, DC & FE, sont chacun égaux à AB par la même raison: Donc ils sont égaux entr'eux; ainsi en leur ajoutant la même ligne CF, on aura * N. 236.

DF égal à CE : Donc les trois côtés des deux triangles DAF, CBE, ſont égaux : Donc ces triangles ſont auſſi égaux *.

*N. 190.

Préſentement ſi on retranche de chacun de ces triangles, le triangle CGF qui leur eſt commun, il reſtera au premier, le trapeze AGCD qui ſera égal au reſte BGFE du ſecond triangle *, & ajoutant à ces deux reſtes le même triangle AGB, on a les deux parallelogrammes compoſés de deux parties égales *, & par conſéquent égaux : Donc, &c.

* N. 8.

* N. 9.

COROLLAIRES.

I.

Si le premier parallelogramme ABCD eſt rectangle, le ſecond qui eſt oblique lui ſera toujours égal. D'où il ſuit,

333. *Qu'un parallelogramme oblique quelconque eſt égal à un rectangle de même baſe & de même hauteur.*

II.

Fi. 160.

334. *Que pour avoir la ſuperficie d'un parallelogramme oblique, comme ABCD, il faut multiplier ſa baſe AB par ſa hauteur DE.*

Car le rectangle auquel ce parallelogramme oblique eſt égal, auroit pour baſe AB, & pour côté une ligne égale à la perpendiculaire DE, & ſa ſuperficie ſeroit égale au produit de ces deux lignes*: Donc puiſque l'oblique ABCD eſt égal à ce rectangle, il a la même ſuperficie, c'eſt-à-dire, celle qui réſulte du produit de ſa baſe AB par ſa hauteur DE. *N. 325.

REMARQUES.

I.

335. Il eſt évident que plus l'angle DAB, que font enſemble les deux côtés AD & AB du parallelogramme ſera petit, ou qu'il différera de l'angle droit, & plus la perpendiculaire DE ſera petite: Car ſi on ſuppoſe que cet angle devienne BA*d*, le côté A*d* ſera plus incliné ſur AB, & par conſéquent ſon extrémité *d* ſera alors plus proche de la baſe AB, que lorſque cette même extrémité étoit en D: Donc la perpendiculaire *de* ſera plus courte que DE: Mais le parallelogramme eſt toujours égal au produit de ſa baſe par ſa hauteur: Donc lorſque cette hauteur diminue, la ſuperficie diminue auſſi.

336. D'où il ſuit, 1°. Que ce n'eſt point la longueur ſeule des côtés du parallelogramme oblique qui décide de ſa ſuperficie, mais qu'il faut y ajouter auſſi la conſidération des angles; car ſes côtés reſtant les mêmes, ſa ſuperficie varie, s'il arrive du changement dans ſes angles.

337. 2°. Que les côtés d'un parallelogramme étant déterminés, il aura plus de ſuperficie lorſqu'ils ſeront perpendiculaires les uns aux autres, c'eſt-à-dire, lorſqu'il ſera rectangle, que lorſqu'il ſera oblique; car alors il ſera égal au produit de ſes deux côtés différens, au lieu qu'étant oblique, il n'eſt que le produit d'un de ſes côtés par la perpendiculaire abbaiſſée de celui qui lui eſt oppoſé, laquelle eſt toujours plus petite que le côté du parallelogramme incliné ſur la baſe.

Fig. 161. 338. 3°. Que quand on ſçauroit qu'un parallelogramme oblique contiendroit un certain nombre de lozanges, dont chaque côté ſeroit d'une toiſe, on ne connoîtroit pas pour cela ſa ſuperficie, parce qu'il faudroit encore connoître l'angle que font les côtés pour évaluer la perpendiculaire qui donneroit la hauteur du lozange, & qui en feroit enſuite trouver la ſuperficie. Le quarré n'ayant

pas

pas cet inconvénient, ſa meſure eſt fixe & déterminée, & c'eſt par cette raiſon qu'on l'employe à déterminer celle des autres figures.

339. 4°. Que comme toutes les figures ſe meſurent avec le quarré, les lignes que l'on multiplie enſemble pour en avoir la ſuperficie, doivent être perpendiculaires l'une à l'autre ; car ſans cela leur produit ne donneroit point des quarrés, mais des lozanges, dont la valeur n'eſt pas déterminée par celle du côté ; ainſi qu'on vient de le démontrer.

II.

340. Comme il n'y a que les rectangles & les quarrés qui puiſſent être diviſés en quarrés égaux par des paralleles menées à leurs côtés, pour avoir la ſuperficie des autres figures ; il faut qu'elles puiſſent ſe trouver égales à un quarré ou à un rectangle de la même maniere que le parallelogramme oblique a été trouvé égal au rectangle de même baſe & de même hauteur ; car alors en trouvant celle de ces rectangles on a la ſuperficie des figures qui leur ſont égales.

III.

341. Les parallelogrammes qui ſont entre les mêmes paralleles ont la même hauteur ; car elle n'eſt autre choſe que la perpendiculaire abbaiſſée entre leurs côtés paralleles * ; mais entre les mêmes paralleles, les perpendiculaires ſont égales * : D'où il ſuit, que c'eſt la même choſe de dire que *des parallelogrammes ont la même hauteur, ou qu'ils ſont entre les mêmes paralleles.*

*N. 235.

*N. 127.

IV.

342. Lorſqu'on dit que deux figures ſont égales, il ne s'enſuit pas pour cela qu'elles ſoient terminées de la même maniere, mais ſeulement qu'elles ont la même ſuperficie. Ainſi un triangle eſt égal à un quarré, s'il a autant de ſuperficie que le quarré. On dit qu'elles ſont *égales & ſemblables*, lorſqu'étant imaginées poſées les unes ſur les autres, elles ſe couvrent exactement.

THEOREME IV.

343. *Les parallelogrammes qui ont*

des baſes égales, & qui ſont entre les mêmes paralleles, ſont égaux.

DEMONSTRATION.

Soient les parallelogrammes X & Y renfermés entre les mêmes paralleles AB, CD, dont les baſes EF, GH, ſont égales; il faut démontrer qu'ils ſont égaux. Fi. 162.

Pour cela, conſiderez qu'ils ſont égaux chacun à un rectangle de même baſe & de même hauteur *, & qu'à cauſe de l'égalité des baſes & de la hauteur de ces parallelogrammes, ce rectangle eſt le même pour l'un & pour l'autre: Donc ils ſont égaux chacun à des rectangles égaux. Donc ils ſont égaux entr'eux *. C. q. f. d. *N. 333. *N. 10.

THEOREME V.

344. *Les triangles qui ont la même baſe, & qui ſont renfermés entre les mêmes paralleles, ſont égaux.*

Soient les triangles ACB, ADB qui ont la même baſe AB, & qui ſont renfermés entre les mêmes paralleles AE, CD, je dis qu'ils ſont égaux. Fi. 163.

DEMONSTRATION.

Considerez que ces deux triangles sont chacun la moitié des parallelogrammes de même base & de même hauteur*, lesquels sont égaux par la proposition précédente : Or, les moitiés de choses égales, sont égales : Donc, &c.

* N. 239.

345. On démontrera de la même maniere que les triangles qui ont des bases égales, & qui sont entre les mêmes parralleles, sont égaux.

COROLLAIRES.

I.

346. Puisqu'un triangle est la moitié d'un parallelogramme de même base & de même hauteur, & que pour avoir la superficie d'un parallelogramme, il faut multiplier sa base par sa hauteur ; il s'ensuit que pour avoir celle du triangle, *il faut multiplier sa base par la moitié de sa hauteur, ou sa hauteur par la moitié de sa base*, ces deux produits étant évidemment égaux.

Si donc on suppose la base du triangle ACB de 13 toises 4 pieds, & sa

P. 164.

hauteur CD de 18 toises 9 pouces, multipliant AB par la moitié de CD, ou par CD tout entier, & prenant enſuite la moitié du produit, cette moitié ſera la ſurface du triangle ACB qu'on trouvera de 123 toiſes. 5 pieds 1 pouce 6 lignes.

	$13^{t.}\{4^{pieds.}$
	$18—0—9^{pouc.}$
	104
	13.
Faux prod. d'un pied...	2—2—0
	1—0—6
	0—3—3
	9—0—4—6
	3—0—1—6
TOTAL	$247^{toiſ.}\ 4^{p.}\ 3^{p.}\ 0$
dont la moitié eſt...	123—5—1—6

COROLLAIRE II.

347. Il ſuit encore de la même propoſition, *qu'un triangle eſt égal à un parallelogramme de même baſe, mais dont la hauteur eſt la moitié de celle du triangle.*

Car en multipliant la baſe du triangle

par la moitié de ſa hauteur, on a le produit d'un parallelogramme, qui a pour baſe celle du triangle, & pour hauteur la moitié de la hauteur du même triangle: Or, ce produit donne la ſurface du triangle *, & celle de ce parallelogramme: Donc, &c.

*N. 145.

On démontrera de la même maniere

348. *Qu'un triangle eſt égal à un parallelogramme, lorſqu'ayant ſa baſe une fois plus grande que celle du parallelogramme, il a la même hauteur.*

THEOREME VI.

349. *Un trapeze eſt égal à un parallelogramme, qui a pour baſe une ligne égale à la moitié de ſes deux côtés paralleles, & pour hauteur la perpendiculaire tirée entre les mêmes côtés.*

Préparation pour la démonſtration.

Fi. 165. Soit le trapeze ABCD, dont AB & CD ſont les deux côtés paralleles. On menera du point C, CE parallele à AD: on coupera EB en deux également en F, & l'on menera FG parallele à EC, terminée en G par le prolongement de

DC. On aura alors le parallelogramme AFGD qui a pour baſe AF, moitié des deux côtés paralleles AB, DC du trapeze; car AE eſt égale à DC, à cauſe du parallelogramme AECD *; EF eſt la moitié de EB qui eſt la différence des deux côtés paralleles: Donc AF eſt la moitié de la ſomme de ces deux côtés: ce parallelogramme a pour hauteur la perpendiculaire tirée entre les deux côtés paralleles du trapeze, puiſqu'il a pour côtés oppoſés ces deux mêmes côtés. Il faut prouver qu'il eſt égal au trapeze. *N.236.

DEMONSTRATION.

Conſiderez que pour former le parallelogramme AFGC, on retranche du trapeze le triangle FIB, qui eſt égal au triangle CGI; car CG eſt égal à EF *, qui eſt auſſi égale à FB; l'angle BFI eſt égal à l'angle IGC, parce qu'ils ſont alternes *; les angles IBF & ICG, ſont égaux par la même raiſon: Donc ces deux triangles ont chacun un côté égal, & les angles ſur ce côté égaux, chacun à *chacun*: Donc ils ſont égaux *: Donc ce *qu'on* ajoute pour former le parallelogramme AG eſt égal à ce qu'on retranche du trapeze: Donc ce parallelogram- *N.236. *N.135. *N.193.

me eſt égal au trapeze : Donc, &c.

COROLLAIRE.

350. Il ſuit de cette propoſition, que pour avoir la ſuperficie d'un trapeze, il faut additionner enſemble ſes deux côtés paralleles, prendre la moitié de leur ſomme, & la multiplier par la perpendiculaire, tirée entre ces mêmes côtés.

THEOREME VII.

351. *La ſuperficie de tout quadrilatere eſt égale à celle des deux triangles, dans leſquels ſa diagonale le partage.*

Fi. 166. Cette propoſition eſt évidente ; car ſi l'on a le quadrilatere irrégulier ABCD, pour en avoir la ſuperficie, on tirera la diagonale AC & enſuite des points B & D on abbaiſſera ſur cette ligne les perpendiculaires ED, BF qui ſeront les hauteurs des triangles ADC, ABC. On multipliera après cela AC par la moitié de DE, ce qui donnera la ſurface du triangle DAC ; puis AC par la moitié de BF, ce qui donnera l'autre triangle ACB ; la ſomme de la ſuperficie de ces deux triangles, ſera celle du quadrilatere.

THEOREME

THEOREME VIII.

352. *Tout polygone régulier eſt égal à un triangle qui a pour baſe ſa circonférence, & pour hauteur ſon rayon droit, ou la perpendiculaire abbaiſſée du centre du polygone ſur un de ſes cotés.*

Soit le pentagone régulier X, il faut démontrer que ſa ſuperficie eſt égale à celle du triangle ACH, dont la baſe AH eſt ſuppoſée égale à la circonférence du pentagone, & qui a pour hauteur CD, qui eſt le rayon droit du pentagone. Fi. 167.

DEMONSTRATION.

Tirez les rayons obliques de ce polygone ; ils le partageront en autant de triangles qu'il a de côtés, leſquels ſeront égaux entr'eux, & au triangle ACB *: portez AB ſur AH autant de fois que le polygone a de côtés, c'eſt-à-dire, dans cet exemple cinq fois, ou quatre fois de B en H ; par chaque point de diviſion, E, F, &c. tirez les lignes CE, CF, &c. alors le triangle ACH contiendra autant de triangles que le polygone X ; mais tous ces triangles ſont *N. 268.

chacun égaux au triangle ACB qui appartient en même-tems au polygone & au triangle ACH ; car toutes leurs baſes ſont égales à AB, & ils ont pour hauteur la perpendiculaire CD, abbaiſſée de leur ſommet commun C ſur leur baſe, ou le prolongement de leurs baſes *: Donc le triangle ACH eſt compoſé d'autant de triangles égaux que le polygone X ; mais ils ſont tous égaux à ceux de ce polygone, puiſqu'ils le ſont à ACB : Donc ſa ſuperficie eſt égale à celle du polygone X : Donc, &c.

*N. 345.

Il eſt clair que cette démonſtration eſt la même pour toute autre ſorte de polygone régulier d'un plus grand nombre de côtés.

REMARQUE.

On a tiré par le centre C du polygone une parallele à AH, & l'on a conſtruit ſur la baſe de chaque triangle BCE, ECF, &c. du triangle total ACH, des triangles égaux & ſemblables à ACB, pour rendre la démonſtration plus ſenſible : chaque triangle oblique, comme ECF étant égal au triangle E*b*F conſtruit ſur la même baſe, & entre les paralleles AH & C*d*.

COROLLAIRE I.

Il suit de cette proposition,

353. *Qu'un cercle quelconque Z, est égal à un triangle CAB, qui a pour base sa circonférence, & pour hauteur son rayon CA.*

Car le cercle peut être conçu ou considéré comme un polygone régulier d'une infinité de côtés *, sur lesquels le rayon est perpendiculaire, puisqu'il l'est à toutes les tangentes du cercle, qui sont le prolongement de ses petits côtés *: Donc par la proposition précédente, il est égal à un triangle qui a pour base sa circonférence, & pour hauteur son rayon. C. q. f. d. Fi. 168. *N. 211. *N. 147.

COROLLAIRE II.

354. Il suit encore de la même proposition, que pour avoir la superficie d'un polygone régulier quelconque, il faut multiplier sa circonférence par la moitié de son rayon droit; car pour avoir la superficie du triangle égal au polygone, il faut multiplier sa base par la moitié de sa hauteur *: Or, sa base est la *N. 346.

circonférence du polygone, & ſa hauteur eſt ſon rayon droit : Donc, &c.

355. Par la même raiſon, il faut auſſi pour avoir la ſuperficie du cercle, multiplier ſa circonférence par la moitié de ſon rayon, ou le quart de ſon diamétre.

COROLLAIRE III.

356. Il ſuit auſſi qu'un polygone régulier ou un cercle, eſt égal à un parallelogramme qui auroit pour baſe la moitié de la circonférence du polygone ou du cercle, & pour hauteur le rayon droit du premier, ou le rayon du ſecond.

Car un parallelogramme, dont la baſe n'eſt que la moitié de celle d'un triangle, & dont la hauteur eſt la même, eſt égal au triangle* : Donc, &c.

*N. 348.

REMARQUE.

357. La ſuperficie du cercle, & celle de toutes les autres figures curvilignes ou mixtilignes, ſe nomme leur *quadrature*, parce qu'elle ne peut être connue qu'en la rapportant à des figures rectilignes, dont la meſure commune eſt le quarré. Ainſi chercher la quadrature d'une figure bornée de lignes courbes, c'eſt

chercher ſa ſuperficie : enſorte que la quadrature du cercle ne conſiſte qu'à meſurer le cercle exactement. On vient de voir qu'il eſt égal à un triangle, qui a pour baſe ſa circonférence, & pour hauteur ſon rayon : Comme la ſuperficie d'un tel triangle paroît fort aiſée à trouver, on pourroit croire que celle du cercle, auquel ce triangle eſt égal, doit être connu depuis long-tems : Mais il faut obſerver que pour trouver la ſuperficie du triangle égal au cercle, il faut connoître ſa circonférence : Si elle étoit connue, la quadrature du cercle ne ſeroit plus un problême à réſoudre, c'eſt dans ſa détermination exacte & géométrique que conſiſte la difficulté de cette quadrature : Elle n'eſt pas encore connue, quoiqu'elle ait été l'objet des recherches des plus grands Géométres de l'antiquité, & même de pluſieurs modernes.

Si la circonférence du cercle étoit égale à celle de l'exagone inſcrit, elle ſeroit trois fois plus grande que le diamétre ; car le côté de l'exagone étant égal au rayon *, ſa circonférence vaut ſix rayons ou trois diamétres. D'où il ſuit, que le diamétre eſt le tiers de la circonférence de l'exagone : Mais la circonfé- *N. 184.

rence du cercle eſt plus grande que celle de ce polygone, chacun de ces côtés étant plus petit que l'arc qu'il ſoutient: on voit par-là que le diamétre eſt plus petit que le tiers de la circonférence du cercle.

358. *Archiméde*, célébre Géométre de Syracuſe, qui vivoit il y a environ 1960 ans, ayant inſcrit & circonſcrit au même cercle un polygone de 96 côtés, trouva que le diamétre du cercle étant diviſé en ſept parties égales, ſa circonférence contient environ 22 des mêmes parties, c'eſt-à-dire, *que le diamétre eſt à la circonférence du cercle, à peu près comme* 7 *eſt à* 22.

359. D'où il ſuit, que le diamétre d'un cercle étant connu en meſures quelconques, comme toiſes, pieds & pouces, &c. on peut trouver ce que ſa circonférence contient des mêmes meſures; car que le diamétre ſoit diviſé en autant de parties que l'on voudra, il aura toujours le même rapport avec la circonférence du cercle. Ainſi la comparaiſon des ſept parties du diamétre avec les 22 de ſa circonférence eſt la même que celle du même diamétre partagé ou meſuré en toiſes, pieds & pouces, &c. avec les toiſes, pieds & pouces que valent la circonférence.

360. De sorte qu'on peut dire, *comme le diamétre diviſé en ſept parties eſt à ſa circonference, qui vaut 22 des mêmes parties; ainſi le diamétre diviſé en toiſes, pieds & pouces, &c. eſt aux toiſes, pieds & pouces de ſa circonference.*

Ce qui fait voir que lorſque le diamétre d'un cercle eſt connu, il ne faut faire qu'une ſimple Regle de Trois pour trouver ſa circonférence. Voyez la maniere de faire cette Regle N. 115. du Traité d'Arithmétique.

Par exemple, ſuppoſons qu'on propoſe de trouver la circonférence d'un cercle, dont le diamétre a 28 toiſes; on la trouvera par cette Regle de Trois. 7. 22 :: 28. *x*. On trouvera pour *x*, c'eſt-à-dire, pour le quatriéme terme de cette Regle, qui repréſente la circonférence du cercle dont il s'agit, 88 toiſes.

Ainſi on aura la ſuperficie de ce cercle en multipliant 88 par la moitié du rayon, ou le quart du diamétre 28 qui eſt 7 *. *N. 355.

361. Si on connoît la circonférence d'un cercle, & qu'on veuille déterminer par ſon moyen le diamétre; il eſt évident qu'il ne faut que renverſer la Regle de Trois.

Par exemple, ſuppoſant que la circon-

férence du cercle précédent qu'on a trouvée de 88 toises soit connue, & que ce soit le diamétre de ce cercle qu'il faille trouver ; on mettra 22 pour le premier terme de la Regle ; 7, pour le second, & la circonférence 88 le troisiéme ; le quatriéme terme qu'on trouvera, sera le diamétre demandé.

22. 7 :: 88. *x*.

Faisant la Regle, on trouvera 28 pour la valeur de *x*, ou pour le diamétre du cercle dont il s'agit.

Si on suppose que la terre soit sensiblement ronde, comme les expériences le font voir, & que la valeur d'un degré du cercle qui en détermine le tour, soit de 25 lieues, on aura pour sa circonférence 360 fois 25 lieues, c'est-à-dire 9000. Supposons qu'on veuille, par le moyen de cette connoissance, déterminer le diamétre de la terre ou celui du cercle dont nous venons de parler, on le fera par cette Regle de Trois.

22. 7 :: 9000. *x*.

Faisant cette Regle on trouvera 2863 lieues pour son quatriéme terme, ou pour le diamétre de la terre.

Fi. 169. 362. On appelle *Secteur* une partie

de cercle ACB compriſe entre deux rayons CA, CB, & un arc AB.

THEOREME IX.

363. *Tout ſecteur eſt égal à un triangle qui a pour baſe une ligne égale à l'arc du ſecteur, & pour hauteur le rayon du cercle dont le ſecteur fait partie.*

DEMONSTRATION.

Soit le ſecteur ACB : il faut démontrer qu'il eſt égal au triangle DEF, qui a pour baſe une ligne EF égale à l'arc du ſecteur, & pour hauteur la ligne DE égale au rayon du même arc.

Pour cela, conſiderez que le ſecteur peut être conçu comme compoſé d'une infinité de petits triangles égaux AC*a*, *a*C*b*, &c. dont les baſes A*a*, *ab*, &c. ſont infiniment petites, & qui ont pour hauteur commune, le rayon CA du ſecteur ; conſiderez de même que le triangle EDF peut être partagé en autant de triangles ED*c*, *c*D*d*, &c. qu'il y en a dans le ſecteur, en imaginant ſa baſe EF diviſée dans le même nombre de parties égales que l'arc du ſecteur. Or, tous ces petits triangles ayant des baſes & des

N. 215. hauteurs égales, ſont égaux entr'eux, & à ceux dont le ſecteur eſt compoſé. Dans cet état, le triangle & le ſecteur ſont compoſés de même nombre de triangles égaux : Donc ils ſont égaux : Donc, &c.

COROLLAIRE.

Il ſuit de-là,

364. *Que pour avoir la ſuperficie d'un ſecteur, il faut multiplier l'arc qui lui ſert de baſe par la moitié de ſon rayon.*

Car pour avoir la ſuperficie du triangle DEF qui eſt égal au ſecteur, il faut multiplier ſa baſe EF par la moitié de *N. 346. DE * : Or EF eſt égal à l'arc du ſecteur par la ſuppoſition, & DE l'eſt à ſon rayon : Donc, &c.

REMARQUE.

365. Pour trouver la ſuperficie du ſecteur, ſi ſon arc eſt donné en degrés, ou ce qui eſt la même choſe, ſon angle ACB, il faut réduire d'abord cet arc en toiſes.

Pour cela, il faut que le rayon AC ſoit connu ; alors le diamétre du cercle, dont le ſecteur fait partie, ſera auſſi con-

au, puisqu'il vaut deux rayons.

On trouvera la circonférence du cercle du secteur par la connoissance de son diamétre, ainsi qu'on vient de l'enseigner *. Après quoi on fera, pour trouver l'arc du secteur, une Regle de Trois, dont les deux premiers termes seront les degrés de la circonférence, & ceux de l'arc du secteur; le troisiéme sera la circonférence en toises; le quatriéme terme de cette regle donnera les toises de l'arc du secteur. Car il est évident que comme la circonférence en degrés est à l'arc du secteur en degrés; ainsi les toises de 360 degrés de la circonférence sont aux toises de l'arc du secteur. *N. 360.

Par exemple, suppoſons l'arc du secteur de 60 degrés, & le rayon AC de 14 toises, le diamétre du cercle du secteur vaudra 28 toises; on aura la circonférence de ce cercle par cette Regle de Trois; 7. 22 :: 28. x. ce terme sera trouvé de 88 toises.

A présent on fera cette seconde Regle de Trois. 360 degrés est à 60 dégrés comme 88, nombre des toises de la circonférence, est aux toises de l'arc de 60 degrés.

Or 360, 60 :: 88. x.

Faisant cette Regle, on trouvera

pour le quatriéme terme, ou pour les toiſes de l'arc AB, 14 toiſes 4 pieds.

Préſentement pour avoir la ſuperficie du même ſecteur, il faut multiplier 14 toiſes 4 pieds par la moitié de ſon rayon, c'eſt-à-dire par 7 ; le produit ſera la ſuperficie demandée.

Fi. 170. 366. On appelle *ſegment*, une partie de cercle compriſe entre un arc & ſa corde.

Telle eſt la partie ACBA compriſe entre l'arc ACB & ſa corde AB.

367. On a la ſuperficie d'un ſegment, lorſque l'on connoît le rayon AD du cercle auquel il appartient, & le nombre des degrés de ſon arc, en trouvant d'abord celle du ſecteur DACB, & retranchant enſuite de ce ſecteur la ſuperficie du triangle ACB ; il eſt évident que le reſte ſera la ſuperficie du ſegment.

Soit par exemple le rayon AD de 21 toiſes, la corde AB de 30, & la perpendiculaire DE de 14 toiſes 4 pieds 2 pouces ; enfin ſoit l'angle ADB de 100 degrés.

On cherchera d'abord la ſuperficie du ſecteur ACBD. Pour cela, on déterminera la circonférence du cercle qui a pour rayon celui du ſecteur. On trouvera 132 toiſes pour cette circonférence.

On cherchera auſſi la valeur de l'arc ACB de 100 degrés. On la trouvera de 36 toiſes 4 pieds.

On multipliera cet arc par le rayon AD, & l'on prendra la moitié du produit 770, qui donnera 385 toiſes pour la ſuperficie du ſecteur.

Arc ACB..	36 toiſ. 4 pieds.
Rayon	21.
	36
	72.
Pour 3 pieds	10—3
Pour 1 pied	3—3
TOTAL..	770 toiſes.
Moitié....	385 toiſes.

Le ſecteur ACBD étant ainſi connu, on cherchera la ſuperficie du triangle ABD, en multipliant AB par DE, & prenant la moitié du produit, on aura 220 toiſes, 2 pieds, 6 pouces pour ce triangle.

AB.	30 toises.
DE.	14 toif. 4 pi. 2 pou.
	120
	30.
Pour 3 pieds	15
Pour 1 pied	5
Pour 2 pouces	0—5
Produit total	440—5—0
Dont la moitié eſt . . .	220 toif. 2 pi. 6 pou.
Du ſecteur ACBD . . .	385 toif. 0 pi. 0 pou.
Otant le triangle ABD	220—2—6
Il reſte pour le ſegment ACBA	164 toif. 3 pi. 6 pou.

De la meſure des figures irrégulieres.

368. On meſure les figures irrégulieres en les partageant en parallelogrammes, triangles, trapezes, &c. Pour le faire plus commodément, on peut lever le plan de la figure que l'on veut meſurer, & la partager après cela en parties qui puiſſent être meſurées. La ſomme de toutes les figures dans laquelle la figure propoſée aura été diviſée, donnera évidemment ſa ſuperficie. Mais pour opérer

avec juſteſſe de cette maniere, il faut que le plan ſoit levé très-exactement, & qu'il ſoit conſtruit ſur une échelle aſſez grande pour que les pieds y ſoient au moins des grandeurs ſenſibles.

REMARQUES.

I.

369. On ſçait en général que l'*Arpentage* n'eſt autre choſe que l'art de meſurer les terres, les bois, &c. Or, avec les principes qu'on vient de donner, on peut meſurer toutes ſortes de ſuperficies planes; on peut donc ainſi arpenter ou meſurer tous les terrains différens qu'on pourra propoſer.

370. On donne le nom d'Arpentage à l'art de meſurer les terres, parce qu'elles ſe meſurent ordinairement avec l'*arpent*.

371. L'arpent eſt une meſure quarrée qui contient toujours *cent perches quarrées*; mais la valeur de la perche n'eſt pas par tout la même. Dans les environs de Paris, elle a 18 pieds de long; dans les eaux & forêts, elle en a 22, &c.

La perche quarrée de 18 pieds de long, a 324 pieds quarrés, celle qui

a 22 pieds de longueur a 489 pieds de ſuperficie.

372. Lorſque l'on n'a point de perche pour meſurer un terrain qu'on veut évaluer en arpent, on peut le meſurer avec la toiſe, & ſçachant ce que ſa ſuperficie contient de toiſes quarrées, on trouvera aiſément ce qu'elle contient d'arpens, en diviſant les toiſes quarrées du terrain, par le nombre des toiſes quarrées que contient l'arpent.

373. Par exemple, ſuppoſant que dans un lieu où la perche a 18 pieds de long, on ait pour la ſuperficie d'un terrain 57800 toiſes quarrées.

Il faut ſçavoir combien l'arpent contient de toiſes quarrées lorſque la perche a 18 pieds.

La perche ayant dix-huit pieds, elle a trois toiſes de longueur, ainſi elle contient neuf toiſes quarrées. L'arpent qui contient cent perches quarrées contient donc 900 toiſes quarrées : Donc en diviſant 57800 toiſes par 900, le quotient donnera le nombre d'arpens contenus dans ce nombre de toiſes. On en trouvera 64.

I I.

374. Dans tout ce qu'on a dit ſur la Planimétrie,

Planimétrie, on a ſuppoſé les ſuperficies abſolument planes; mais comme il y en a peu de cette eſpece, il faut obſerver que lorſqu'on eſt obligé de meſurer des terrains inégaux, on rapporte ordinairement au terrain horiſontal les lignes qu'on meſure ſur ces ſortes de ſuperficies.

Par exemple, ſi dans le terrain AB Fi. 171. il ſe trouve l'élevation X, il eſt évident qu'en meſurant la ligne courbe CLB, on aura une ligne plus grande que l'horiſontale CB qu'on veut avoir; c'eſt pourquoi pour avoir cette ligne CB exactement, il faut planter des piquets perpendiculairement le long de la montagne, comme CD, EF, &c. de maniere que l'extrémité D du premier piquet réponde perpendiculairement au pied E de l'autre, ainſi de ſuite. Alors il eſt évident que la ſomme de toutes les lignes horiſontales DE, FH, &c. donnera la longueur de CB qu'on meſurera de cette maniere horiſontalement, ſans que l'élevation X cauſe aucune erreur dans ſa meſure.

On obſervera à l'occaſion de la remarque précédente,

375. Que ſi l'on veut ſçavoir quelle eſt la ſuperficie de la montagne X, il faut la conſiderer comme compoſée de plu-

sieurs superficies planes, dont il faut mesurer, selon le penchant de la montagne, les lignes qui les terminent.

THEOREME X.

376. *Dans tout triangle rectangle, le quarré de l'hypothenuse est égal aux quarrés des deux autres côtés pris ensemble.*

Fig. 172. Soit le triangle rectangle ACB dont l'angle ACB est droit, il faut démontrer que le quarré ABFE fait sur l'hypothenuse AB, est égal au quarré BN fait sur le côté CB, plus au quarré AM fait sur le côté AC.

DEMONSTRATION.

Du sommet C de l'angle droit abaissez CD perpendiculairement sur EF, elle partagera le quarré AF en deux rectangles quelconques AD & BD : Or, si l'on fait voir que le rectangle AD est égal au quarré AM, & le rectangle BD au quarré BN ; il est évident qu'on aura démontré la proposition dont il s'agit.

Pour cela, tirez CE, CF, HB, & AG, & considerez que le triangle AEC.

eſt la moitié du rectangle AD, parce qu'il a même baſe AE, & qu'il eſt entre les mêmes paralleles AE, CD*. *N. 239.

Conſiderez auſſi que le triangle HAB a même baſe HA, que le quarré AM, & qu'il eſt entre les mêmes paralleles HA, MB: Donc* il eſt la moitié de ce quarré. *N. 239.

Il faut faire voir à préſent que le triangle AEC eſt égal au triangle HAB; car le premier étant la moitié du rectangle AD, & l'autre celle du quarré AM; ſi ces deux moitiés ſont égales, le rectangle & le quarré ſeront égaux.

Le côté AE du triangle AEC eſt égal au côté AB de HAB, parce qu'ils ſont côtés du même quarré*, le côté AC du premier eſt auſſi par la même raiſon égal au côté HA du ſecond. De plus, l'angle CAE du premie eſt égal à l'angle HAB du ſecond, parce qu'ils ſont chacun compoſés d'un angle droit & du même angle CAB; Donc ces deux triangles ont deux côtés égaux, chacun à chacun, & les angles compris par ces deux côtés, égaux: Donc ils ſont égaux*: Donc le rectangle AD eſt égal au quarré AM. *N. 229. *N. 192.

On démontrera de la même maniere que le triangle CBF eſt égal au triangle ABG, & comme le premier eſt la moi-

tié du rectangle BD, & le second la moitié du quarré BN; ce rectangle eſt égal au même quarré BN: Donc puiſque les deux rectangles AD & BD valent le quarré de l'hypothenuſe AB, & qu'ils ſont égaux aux deux quarrés AM & BN, qui ont pour côtés les deux côtés CA & CB qui forment l'angle droit du triangle ACB, le quarré de l'hypothenuſe AB eſt égal au quarré des deux autres côtés. C. q. f. d.

COROLLAIRES.

I.

Fi. 171. 377. On peut par le moyen de cette propoſition, faire un quarré égal à deux autres quarrés donnés A & B; car faiſant un angle droit CDE qui ait ſon côté CD égal au côté du quarré A, & l'autre DE égal à celui de B, tirant la ligne CE, on aura un triangle rectangle CDE dont le quarré qui aura pour côté l'hypothenuſe CE, ſera par la propoſition qu'on vient de démontrer, égal aux quarrés des deux autres côtés CD & DE, c'eſt-à-dire, aux deux propoſés A & B.

II.

378. On peut auſſi par la même propoſition faire un quarré double, triple, quadruple, &c. d'un autre quarré.

Il s'agit pour cela de faire un triangle, dont chacun des côtés de l'angle droit ſoient égaux à celui du quarré donné; le quarré qui aura pour côté l'hypothenuſe de ce triangle, ſera double du quarré propoſé *, & ſi l'on prend cette hypothenuſe, & un des côtés du quarré donné, pour les deux côtés de l'angle droit d'un autre triangle rectangle; il eſt évident que le quarré fait ſur l'hypothenuſe de ce dernier triangle, ſera triple du quarré propoſé. *N. 376.

En ſuivant cette méthode on aura un quarré quadruple, quintuple, &c. d'un autre.

REMARQUE.

379. Il faut bien prendre garde de croire que pour faire un quarré double d'un autre, il ſuffit de doubler ſon côté.

Soit le quarré ABCD dont on veut avoir un quarré double. Si l'on prend EF double de AB, & que l'on faſſe ſur cette ligne le quarré EG, il ſera quadruple de ABCD. Fi. 174.

Pour le prouver, il n'y a qu'à couper EF en deux en I, & élever IL parallelement au côté HE ou GF, & couper de même HE en deux parties égales en M, & mener MN parallele à EF ou HG. Il eſt évident que l'on trouvera alors dans le quarré EFGH quatre quarrés égaux, chacun au propoſé ABCD; ainſi comme en doublant le côté on a quadruplé la ſuperficie. Il s'enſuit,

380. Que les ſuperficies ne ſont point entr'elles dans la même raiſon que leurs circonférences, & par conſéquent que pour doubler ou tripler une figure, il ne s'agit point de doubler ou tripler ſon côté.

XIII.

Des Solides.

381. NOUS avons appellé *Corps* ou *Solide*, l'étendue conſidérée ſelon la longueur, la largeur & la profondeur.

Les extrémités des corps ſont les ſurfaces, comme les extrémités des ſurfaces ſont les lignes, & celles des lignes les points.

382. Une ligne eſt perpendiculaire à un plan, lorſqu'elle fait des angles droits avec toutes les lignes du plan ſur leſquelles elle tombe.

383. Deux plans ſont paralleles, lorſque les perpendiculaires tirées entr'eux ſont égales.

384. Lorſque deux plans ſe coupent, ou qu'ils ſe rencontrent, ils le font dans une ligne droite commune à l'un & à l'autre plan, cette ligne ſe nomme *la commune ſection de ces plans.*

385. Un plan eſt perpendiculaire ou oblique à un autre plan, ſelon l'angle que font enſemble les perpendiculaires tirées ſur ces plans, par un point de leur commune ſection. Ainſi deux plans qui ſe rencontrent ne font qu'un angle plan; mais ſi plus de deux plans ſe rencontrent dans un point, *comme au coin d'un dez à jouer*, ils font un angle appellé *Angle ſolide*, cet angle eſt compoſé de trois *angles plans* au moins, c'eſt-à-dire, de trois angles tracés ſur trois plans différens.

386. On appelle *pyramide*, un corps entouré de triangles dont les ſommets ſe rencontrent dans un même point, & dont les baſes forment une figure plane rectiligne, qu'on nomme *la baſe* de la

Fi. 175. pyramide. Tel eſt le corps ABCDE, entouré des triangles ABE, ABC, &c. dont tous les ſommets ſe rencontrent au point A, & dont les baſes forment le quadrilatere BCDE, qui eſt la baſe de la pyramide.

387. L'angle ſolide A de la pyramide, ſe nomme ſon *ſommet*, & la ligne AF, abbaiſſée perpendiculairement du ſommet de la pyramide ſur le plan de ſa baſe, exprime la hauteur de cette pyramide.

388. Lorſque la pyramide a pour baſe un triangle, elle ſe nomme *triangulaire*; *quadrilatere*, ſi elle a pour baſe un quadrilatere, & ainſi de ſuite ſelon la figure de ſa baſe.

389. La pyramide eſt *droite* ou *oblique*. Elle eſt droite ſi la perpendiculaire abbaiſſée de ſon ſommet ſur ſa baſe, paſſe par le centre de cette baſe; autrement elle eſt oblique.

Il ſuit de-là que la pyramide droite a toujours pour baſe un polygone regulier. Car il n'y a que cette eſpece de polygone qui ait un centre, & que toute pyramide qui a pour baſe un polygone regulier n'eſt pas droite pour cela ſeulement, mais qu'il faut encore que la perpendiculaire abbaiſſée du ſommet de la pyramide

pyramide ſur ſa baſe, paſſe par le centre de cette baſe.

390. Si la baſe de la pyramide eſt un cercle, elle peut être conſiderée comme entourée d'une infinité de petits triangles, qui tous enſemble font une ſuperficie courbe BAC, & cette pyramide ainſi arrondie, ſe nomme *cône.*

391. Le point A, eſt le ſommet du cône comme celui de la pyramide, & la ligne AD, tirée du ſommet A, au centre D de la baſe du cône, ſe nomme *ſon axe.* Lorſque cette ligne eſt perpendiculaire à la baſe du cône, il eſt appellé *cône droit*; ſinon il eſt oblique, & ſa hauteur ſe meſure comme celle de la pyramide, par une perpendiculaire abbaiſſée de ſon ſommet ſur ſa baſe. Fi. 176.

392. La ligne AB, menée du ſommet A du cône, à un point B de la circonférence de ſa baſe, ſe nomme *le côté du cône*, lorſque le cône eſt droit tous ſes côtés ſont égaux, parce que le ſommet eſt également diſtant alors de tous les points de la circonférence de la baſe.

393. Si la partie de la pyramide ou du cône vers le ſommet, eſt abattue, la pyramide ſe nomme *pyramide tronquée*, & le cône, *cône tronqué.*

394. *Le priſme*, eſt un ſolide ter-

miné par des ſurfaces planes, parmi leſquelles il y en a deux oppoſées, égales, ſemblables & paralleles, qui ſe nomment
Fi. 177. *les baſes* du priſme, parce qu'on peut le conſidérer également poſé ſur l'une ou ſur l'autre. Ces deux baſes ſont jointes enſemble par des parallelogrammes qui entourent le priſme de tous côtés.

395. Si la baſe du priſme eſt un triangle, on le nomme *priſme triangulaire*, lorſqu'elle eſt quadrilatere, *priſme quadrilatere*, & ainſi de ſuite ſuivant le polygone de ſa baſe.

396. Lorſque la baſe du priſme eſt un parallelogramme, il ſe trouve terminé de toutes parts par des parallelogrammes, & il ſe nomme *parallelipipede*.

Fi. 178. 397. Si la baſe du priſme eſt un cercle, le cercle ſupérieur & celui de la baſe ſe trouvent joints enſemble par une infinité de petits parallelogrammes qui forment une ſurface courbe, alors le priſme eſt appellé *cylindre*.

On peut ſe repréſenter le cylindre par une colomne également groſſe dans toute ſa hauteur, ou bien, par une ou pluſieurs dames à jouer, poſées également les unes ſur les autres.

398. La ligne AB, tirée par le centre A, du cercle ſupérieur du cylindre,

& par le centre B de ſa baſe, ſe nomme *l'axe du cylindre.*

399. Les priſmes, les parallelipipedes, & les cylindres, peuvent être *droits* ou *obliques.* Ils ſont droits, lorſque les plans qui joignent leur baſe ſont des angles droits avec elle, ſinon ils ſont obliques; alors leur hauteur ſe meſure par une perpendiculaire abbaiſſée du plan parallele à la baſe ſur celui de cette baſe, prolongé s'il eſt néceſſaire.

400. *La ſphere* ou *le globe*, eſt un ſolide terminé par une ſeule ſurface courbe, dont tous les points ſont également diſtans d'un point C de ce ſolide, lequel ſe nomme *ſon centre.* Fi. 179.

401. On peut concevoir la ſphere ou le globe formé par le mouvement d'un demi-cercle ADB, autour de ſon diamétre AB, & alors il eſt évident, Fi. 180.

1°. Que le centre C du demi-cercle ABD, l'eſt auſſi de la ſphere.

2°. Que toutes les lignes comme CD, CF, tirées du centre C, de la ſphere à ſa ſuperficie, ſont égales; elles ſont nommées *rayons* ou *demi-diamétres de la ſphere.*

3°. Que toutes celles comme AB, EF, qui paſſent par le centre C de la ſphere, & qui ſe terminent de part &

d'autre à ſa ſuperficie, ſont égales, étant compoſées de deux rayons égaux. Ces lignes ſont *les diamétres de la ſphere.* Le diamétre AB, ſur lequel on imagine que le demi-cercle ADB s'eſt mû pour décrire la ſphere, ſe nomme *ſon axe.* Ainſi, l'axe d'un globe ou d'une ſphere eſt toujours un de ſes diamétres. Les extrémités A & B de l'axe de la ſphere ſe nomment *ſes poles.*

4°. Que toutes les lignes, comme GH, perpendiculaires à l'axe AB, décrivent dans le mouvement du demi-cercle ADB, des cercles paralleles entr'eux, & perpendiculaires à l'axe AB : on les nomme *cercles paralleles.* Le plus grand de ces cercles eſt celui qui eſt décrit par le rayon DC, qui eſt également diſtant des poles A & B.

5°. Que tous les cercles paralleles décrits par des lignes GH, KL, chacune également éloignée des poles A & B, ſont égaux.

6°. Enfin, que tout cercle, comme ADBFA, qui paſſe par le centre C de la ſphere, la coupe en deux parties égales. Car ſi au lieu d'imaginer la ſphere formée par le mouvement du demi-cercle ADB, on la conçoit formée par le mouvement du cercle entier ADBFA,

autour de ſon diamétre AB, on concevra fort aiſément qu'à meſure que le demi-cercle ADB avancera du côté de BFA, le demi-cercle BFA avancera de même du côté de ADB; & que lorſque le demi-cercle ADB aura décrit la moitié de la ſphere, le demi-cercle BFA en aura décrit l'autre moitié; donc la ſphere ſe trouvera coupée en deux parties égales par le cercle ADBFA; donc, &c.

402. Tous les cercles qui paſſent par le centre de la ſphere, & qui par conſéquent la coupent en deux parties égales, ſont nommés *grands cercles de la ſphere*, & ils ſont tous égaux.

A l'égard des autres cercles qui coupent la ſphere ſans paſſer par ſon centre, on les nomme *petits cercles*. Il eſt clair, après ce qu'on vient de dire, que les petits cercles coupent la Sphere en deux parties inégales.

403. On nomme *zone*, une partie de la ſphere compriſe entre deux cercles paralleles. C'eſt une eſpece de ceinture qui tourne autour d'une partie de la ſphere.

404. Outre les corps qu'on vient de définir, il y en a cinq autres qu'on appelle *réguliers*, parce qu'ils ſont compris ou terminés par des figures régulie-

res, égales & semblables.

Ces corps sont :

1°. Le *Tetraëdre* ou *la pyramide réguliere*, terminé par quatre triangles équilateraux.

2°. L'*Exaëdre* ou *le Cube*, terminé par six quarrés. *On peut se le représenter par un dez à jouer.*

3°. L'*Octaëdre*, terminé par huit triangles équilateraux.

4°. Le *Dodecaëdre*, terminé par douze pentagones.

5°. Et l'*Icosaëdre*, terminé par vingt triangles équilateraux.

405. Il n'y a que ces cinq corps réguliers, & voici comme on démontre qu'il ne peut y en avoir d'autres.

Il faut au moins trois angles plans pour former un angle solide, & tous les angles plans qui forment un angle solide doivent, étant ajoutés ensemble, valoir moins que 4 angles droits ou 360 degrés : car pour peu qu'on y fasse attention, on verra clairement, que si ces angles devenoient égaux à 4 angles droits, l'angle solide disparoîtroit. Pour former donc des corps réguliers avec les figures régulieres, il faut que les angles de ces figures, pris au moins 3 à 3, soient de moindre valeur que quatre an-

gles droits. Or les angles du triangle équilateral valent chacun 60 degrés ; donc on peut faire un angle ſolide avec trois de ces triangles, & c'eſt celui du Tetraëdre. On en peut faire auſſi avec quatre, c'eſt celui de l'Octaëdre, & avec cinq, c'eſt celui de l'Icoſaëdre ; mais ſix angles de ces triangles, valent 360 degrés ou quatre angles droits ; donc on ne peut point faire d'angle ſolide avec ſix triangles équilateraux ; ainſi on ne peut former avec ces triangles, que le Tetraëdre, l'Octaëdre, & l'Icoſaëdre.

Quatre angles du quarré ne peuvent point faire d'angle ſolide, on n'en peut donc faire qu'avec trois, qui eſt celui de l'Exaëdre ou du Cube.

L'angle de la circonférence du pentagone eſt de 108 degrés *, trois de ces angles font 324 degrés ; ainſi ils valent moins que quatre angles droits ; par conſéquent ils peuvent former un angle ſolide, & en effet ils forment celui du Dodecaëdre ; mais quatre de ces mêmes angles valent plus de 360 degrés. Donc on ne peut point faire d'autre angle ſolide avec le pentagone, que celui du Dodecaëdre. *N. 276.

L'angle de la circonférence de l'exa-

N.276. gone eſt de 120 degrés * ; trois de ces angles valent donc 360, ou quatre angles droits ; donc ils ne ſont point ſuſceptibles d'angle ſolide. L'angle de la circonférence des polygones réguliers au-deſſus de l'exagone, eſt plus grand que celui de l'exagone ; donc on pourra encore moins faire d'angle ſolide avec les angles de ces polygones. Donc, &c.

PROBLEMES.

I.

406. *D'un point donné hors un plan, abaiſſer une perpendiculaire ſur ce plan.*

Fi. 181. Soit le point A donné hors du plan FG, ſur lequel il faut abbaiſſer une perpendiculaire.

On prendra un compas, & on l'ouvrira de maniere qu'en poſant une de ſes pointes ſur le point donné A, on puiſſe, avec l'autre pointe, marquer trois points B, D, E, ſur le plan FG, on cherchera enſuite le centre C du cercle qui paſſera par ces trois points, & tirant la ligne AC, elle ſera la perpendiculaire demandée.

Car, par la conſtruction, le point A &

le point C ſont chacun également diſtans des points B, D, E; dont la ligne AC ne panche pas plus d'un côté que d'un autre ſur le plan FG; donc elle ſera des angles droits avec toutes les lignes tirées ſur ce plan, & qui paſſeront par le point C. Donc, &c.

II.

407. *D'un point donné ſur un plan élever une perpendiculaire à ce plan.*

Pour réſoudre ce problême, on peut ſe ſervir d'une eſpece d'*équerre* à trois branches, dont l'une ſoit perpendiculaire aux deux autres branches, qui ſont enſemble un angle quelconque à l'extrémité de la premiere. On poſera ſur le point donné le ſommet de l'angle droit que fait une des branches de l'équerre avec chacune des deux autres; la ligne menée de ce point le long de l'autre régle, ſera la perpendiculaire cherchée. Car par cette conſtruction, cette ligne ſera perpendiculaire à deux lignes du plan, elle ne panchera pas, par cette raiſon, plus d'un côté que d'un autre. Donc, &c.

XIV.

De la meſure des ſurfaces des corps.

408. COMME les corps dont on vient de parler, ſont terminés par des ſurfaces dont on a donné la meſure dans l'article de la Planimétrie, il s'enſuit qu'on trouvera aiſément la ſuperficie de ces corps, en prenant celle de toutes les figures qui les déterminent.

On remarquera ſeulement ici,

409. 1°. Que tous les triangles qui entourent les pyramides droites étant égaux, ils ſont, pris enſemble, égaux à un ſeul triangle, qui auroit pour baſe la ſomme de toutes les baſes de ces triangles, & pour hauteur la perpendiculaire tirée du ſommet de la pyramide ſur un des côtés de ſa baſe.

410. D'où il ſuit, que, *la ſurface d'une pyramide droite eſt égale à celle d'un triangle qui a pour baſe la circonférence de la baſe de la pyramide, & pour hauteur la même que celle des triangles dont ce ſolide eſt entouré.*

On aura donc la ſurface d'une pyramide droite en multipliant la circonférence de ſa baſe par la moitié de la perpendiculaire tirée de ſon ſommet ſur un des côtés de ſa baſe.

Si la pyramide eſt oblique, on cherchera la ſurface de chacun des triangles dont elle eſt compoſée ; la ſomme de toutes ces ſurfaces donnera celle de la pyramide.

411. 2°. Que tous les parallelogrammes qui entourent le priſme droit, ayant la même hauteur, ils ſont égaux à un ſeul rectangle qui auroit pour baſe la ſomme des baſes de ces parallelogrammes & pour hauteur celle du priſme. Ce qui fait voir que,

412. La ſurface d'un priſme droit X, eſt égale à celle d'un rectangle ABCD, qui a pour baſe la circonférence de celle du priſme, & pour hauteur celle du même ſolide ; qu'ainſi, on *aura la ſurface d'un priſme droit en multipliant la circonference de ſa baſe par ſa hauteur.* Fi. 182 & 183.

413. Lorſque le priſme eſt oblique, il faut trouver la ſurface de chacun des parallelogrammes dont il eſt entouré, la ſomme de toutes ces ſurfaces donnera celle du priſme.

On trouvera de la même maniere la ſurface des cubes & parallelipipedes droits ou obliques.

414. 3°. Que le cylindre pouvant être conſideré comme un priſme d'une infinité de côtés, on aura ſa ſurface lorſqu'il ſera droit, en multipliant la circonférence de ſa baſe par ſa hauteur.

415. 4°. Que le cône pouvant auſſi être conſideré comme une pyramide d'une infinité de côtés, on aura la ſurface du cône droit comme celle de la pyramide droite, c'eſt-à-dire, en multipliant la circonférence de ſa baſe par la moitié du côté du cône.

Autrement, on peut regarder la ſurface du cône droit, comme compoſée d'une infinité de petits triangles égaux, dont les ſommets ſont réunis à celui du cône: Or tous ces petits triangles étant imaginés enlevés de deſſus le cône & poſés ſur un plan, en ſe touchant immédiatement les uns & les autres, ils formeroient un ſecteur dont le rayon ſeroit le côté du cône, & l'arc, la circonférence de la baſe du cône. Pour avoir la ſuperficie de ce ſecteur * il faudroit multiplier FN. 364. ſon arc par la moitié de ſon rayon; donc pour avoir la ſuperficie d'un cône droit, il faut multiplier la circonférence de ſa

baſe par la moitié de ſon côté.

416. Si le cône droit eſt tronqué, de maniere que ſa partie ſupérieure, ou vers ſon ſommet ait été coupée par un plan perpendiculaire à l'axe du cône, pour lors tous les petits triangles qui formoient la ſurface du cône, ſe changeront en autant de petits trapezes égaux entr'eux, & qui tous enſemble ſeront égaux à un ſeul trapeze, qui auroit pour hauteur la partie reſtante du côté cône, & pour côtés paralleles la circonférence de la baſe du cône & celle de ſa partie tronquée. Or pour avoir la ſuperficie d'un trapeze, il faut multiplier la moitié de la ſomme de ſes deux côtés paralleles par ſa hauteur *. Donc pour avoir la ſuperficie d'un cône tronqué droit, il faut multiplier la ſomme de la moitié de la circonférence de ſa baſe & de ſa partie tronquée, par la partie du côté qui eſt entre ſa baſe & cette partie. *N. 350.

417. On aura de la même maniere la ſuperficie d'une pyramide tronquée droite, & l'on aura celle de la pyramide tronquée oblique, en trouvant la ſuperficie de chaque trapeze dont elle eſt entourée, & joignant enſemble toutes les ſuperficies de ces trapezes.

Comme la propoſition ſuivante, &

plusieurs de celles qu'on verra dans l'article suivant, ne peuvent être démontrées qu'en supposant d'autres propositions, qu'on a cru devoir obmettre dans cet abregé, on n'en donnera point ici les démonstrations ; mais on les trouvera dans l'Arithmetique & la Géométrie de l'Officier.

418. *La superficie d'une sphere est égale à celle d'un cylindre, non compris ses bases, qui a pour base un grand cercle de la sphere, & pour hauteur son diamétre.*

Pour avoir la superficie d'un cylindre, non compris celle de ses bases, on multiplie la circonférence de sa base par sa hauteur *; donc pour avoir la surface d'une sphere, il faut multiplier la circonférence d'un cercle qui a pour diamétre celui de la sphere, par ce même diamétre.

*N.144.

419. Ainsi pour trouver la surface de la terre, on multipliera la circonférence d'un de ses grands cercles, qui a été trouvée de 9000 lieues, par son diamétre, qui a été déterminé, ainsi qu'on l'a vû *, de 2863 lieues, le produit de ces deux nombres (25, 767, 000 lieues quarrées) sera la surface de tout le globe terrestre.

*N.361.

XV.

De la Stereométrie ou meſure des Solides.

420. LEs ſolides ſe meſurent avec d'autres ſolides plus petits, de même que les ſuperficies ſe meſurent avec d'autres ſuperficies plus petites. Or de la même maniere que le quarré eſt la meſure des ſuperficies, le cube l'eſt des ſolides ; ainſi on ſe ſervira ici de *toiſes cubes*, pour *toiſer* les corps, comme on s'eſt ſervi de toiſes quarrées pour toiſer ou meſurer les ſuperficies.

421. *Une toiſe cube*, eſt un cube terminé par ſix toiſes quarrées, & *un pied cube*, eſt un cube terminé par ſix pieds quarrés ; *un pouce cube*, eſt un cube terminé par ſix pouces quarrés, &c.

Avant que d'entrer dans le détail de la meſure des Corps, on établira quelques propoſitions qui en rendront le calcul plus aiſé & plus général.

422. On appellera *Elemens des ſolides* des tranches d'une hauteur infiniment petite formées par des coupes du ſolide, paralleles à ſa baſe.

423. Il ſuit de cette définition, que les ſolides qui ſont également larges dans toute leur hauteur, comme les parallelipipedes, les priſmes & les cylindres, ont tous leurs élemens égaux.

424. Le nombre des élemens des ſolides s'exprime par la perpendiculaire abbaiſſée de la baſe ſupérieure ſur l'inférieure, c'eſt-à-dire, par la hauteur du ſolide.

Il ſuit de-là,

425. 1°. Que les ſolides qui ont leurs élemens égaux chacun à chacun, & en pareil nombre, ſont égaux.

426. 2°. Que les ſolides de même eſpece, comme les parallelipides, les priſmes & les cylindres qui ont des baſes égales, & qui ſont renfermés entre les mêmes plans paralleles, ou qui ont même hauteur, ſont égaux.

Car ces ſolides ayant tous leurs élemens égaux à leur baſe, il s'enſuit que leurs baſes étant égales, leurs élemens ſont égaux; ils ont auſſi le même nombre d'élemens, à cauſe de l'égalité de leur hauteur. Donc ils ſont égaux entr'eux.

427. 3°. Que les ſolides compoſés d'élemens égaux ſont égaux, ſoit qu'ils ſoient droits ou obliques, pourvû qu'ils ayent

ayent des hauteurs égales. Ce qui eſt évident, puiſqu'alors ils contiennent le même nombre d'élemens égaux.

428. Il ſuit de-là, qu'un parallelipipede droit, qui aura, par exemple, la ſuperficie de ſa baſe égale à celle d'un oblique, & la même hauteur, lui ſera égal. Il en ſera de même de tous les autres ſolides également larges dans toute leur élevation, lorſqu'ils auront des baſes & des hauteurs égales, c'eſt-à-dire, des priſmes droits ou obliques & des cylindres.

429. 4°. Que pour avoir la ſolidité d'un parallelipipede, d'un priſme ou d'un cylindre droit ou oblique, il faut multiplier la baſe du ſolide par ſa hauteur.

Pour prouver ce dernier article, il faut conſiderer que la ſolidité d'un ſolide de cette eſpece eſt égale au nombre ou à la ſomme de ſes élemens. Or il en a autant qu'on peut imaginer de points ou de parties infiniment petites dans ſa hauteur. Donc ſa baſe ajoutée autant de fois à elle-même qu'il y a de points dans ſa hauteur, donne la ſolidité du ſolide, ou la ſomme de ſes élemens; mais ajouter une grandeur à elle-même autant de fois qu'il y a de parties ou d'unités dans une ſeconde, c'eſt multiplier la premiere par

la ſeconde. Donc le produit de la baſe du ſolide par ſa hauteur en donne la ſolidité.

THEOREME I.

430. *Si l'on multiplie les toiſes quarrées de la baſe d'un parallelipipede droit, par les toiſes lineaires de ſa hauteur, le produit donnera la quantité des toiſes cubes du ſolide.*

DEMONSTRATION.

Fi. 184. Soit le parallelipipede droit AF dont le côté DE du rectangle de ſa baſe (a) ſoit ſuppoſé, par exemple, de 5 toiſes, & l'autre côté DC de 4, la ſuperficie de ce rectangle ſera de 20 toiſes quarrées.

Si on le diviſe dans ſes 20 toiſes quarrées par des paralleles aux côtés DE, DC, & ſi l'on imagine que par toutes ces paralleles il paſſe des plans perpendiculaires au rectangle DF, ces plans diviſeront le ſolide AF en 20 parallelipipedes, qui auront chacun pour

(a) On ſe ſert ici de la baſe ſupérieure au lieu de l'inférieure, que la figure ne peut faire voir diſtinctement.

baſe une toiſe quarrée, & pour hauteur la ligne DA, qu'on ſuppoſe ici de 7 toiſes. Si l'on ſuppoſe enſuite que par l'extrémité de chacune des toiſes du côté DA, il paſſe des plans paralleles au rectangle DF, ces plans diviſeront chacun des 20 parallelipipedes dont AF eſt compoſé, en 7 cubes, d'une toiſe cube chacun; ainſi il y aura 20 fois autant de toiſes cubes dans tout le parallelipipede AF, qu'il y a de toiſes dans ſa hauteur DA; d'où l'on voit, que pour avoir le nombre des toiſes cubes dont AF eſt compoſé, il faut multiplier la ſurface de ſa baſe DF par ſa hauteur DA. Mais ce nombre de toiſes cubes eſt la ſolidité de ce parallelipipede; donc, &c.

431. Si la baſe DF du parallelipipede AF eſt un quarré, & que ſa hauteur DA ſoit égale au côté DC de ce quarré, il eſt évident que le parallelipipede AF ſera un cube, & qu'on en aura la ſolidité de la même maniere, en multipliant ſa baſe DF par ſa hauteur DA. Pl. 184.

432. Il ſuit de-là, qu'une ſuperficie multiplié par une ligne, produit un ſolide. Or toute ſuperficie peut être regardée comme le produit de deux lignes; donc le produit de trois lignes ou de

trois nombres qui exprimeront chacun la valeur d'une de ces lignes, repréſentera toujours la ſolidité d'un parallelipipede, qui auroit pour baſe le produit de deux de ces lignes, & pour hauteur la troiſiéme.

433. Si ces trois lignes ſont égales, les nombres qui les exprimeront le ſeront auſſi, & leur produit repréſentera un cube.

434. Donc, on aura le cube d'une ligne ou d'un nombre qui exprimera la valeur de cette ligne, en multipliant ce nombre par lui-même, ce qui donnera ſon quarré, & en multipliant enſuite ce quarré par le même nombre qui a ſervi à le former.

435. La toiſe commune ou lineaire, ayant ſix pieds, pour avoir ſon cube, on multipliera d'abord 6 par 6, dont le produit 36 ſera le nombre des pieds quarrés de la toiſe quarrée, comme on l'a déja vû dans la Planimétrie; on multipliera enſuite 36 par 6, & le produit 216 ſera le cube de 6, ou le nombre des pieds cubes d'une toiſe cube. On trouvera de la même maniere, que le pied cube contient 1728 pouces cubes.

REMARQUE

Sur les diviſions de la toiſe cube.

436. On a vû, n. 329. que la toiſe quarrée ſe diviſe comme la toiſe lineaire en ſix parties égales, appellées pieds courant ſur toiſe. On diviſe de même la toiſe cube en ſix parties égales qu'on peut appeller chacune, *pied cube courant ſur toiſe*, ce ſont des parallelipipedes qui ont pour baſe une toiſe quarrée & pour hauteur un pied lineaire : ainſi le pied cube courant ſur toiſe contient 36 pieds cubes, ou la ſixiéme partie des 216 pieds de la toiſe cube.

Le pied cube ſe diviſe auſſi en douze pouces cubes courant ſur toiſe ; ce ſont des parallelipides qui ont une toiſe quarrée pour baſe & pour hauteur un pouce lineaire : ainſi chaque pouce courant ſur toiſe contient autant de pouces cubes qu'il y a de pouces quarrés dans la toiſe quarrée.

La ligne cube courant ſur toiſe eſt de même un parallelipipede qui a pour baſe une toiſe quarrée & pour hauteur une ligne lineaire.

Maniere de calculer les ſolides.

437. Les diviſions de la toiſe cube dans le même nombre de parties égales que la toiſe lineaire, donnent le moyen de calculer les ſolides auſſi facilement que les grandeurs lineaires & ſuperficielles. On va en donner un exemple dans le toiſé du parallelipipede. Il ſervira de modele pour le calcul des autres ſolides.

Fi. 115. 438. Soit donc le parallelipipede droit EC, dont la baſe ſupérieure AC, qui eſt égale à ſon inférieure, a le côté DC de 4 toiſes, 4 pieds, & le côté AD qui lui eſt perpendiculaire de 3 toiſes 3 pieds.

DC.	4 toiſ. 4 pieds.
AD.	3—3
	12—0—0
pour les 3 pi. du multiplicat.	2—0—0
pour les 3 pi. du multiplican.	1—4—6
pour 1 pié du même	0—3—6
Superficie de AC. . . .	16—2
AE. . . .	6—3
	96
pour les 3 pi. du multiplicat.	8
pour les 2 pi. du multiplican.	2—2
Solidité de EC. . .	106 toiſ. 1 pied.

En pratiquant ce qui a été expliqué, n. 330. pour le calcul des ſuperficies, on aura 16 toiſes quarrées, plus 2 pieds courant ſur toiſe pour celle du rectangle AC. Pour avoir la ſolidité de EC, il s'agit de multiplier le produit de ſa baſe AC par ſa hauteur AE, qu'on ſuppoſe de 6 toiſes 3 pieds.

On multipliera d'abord les 16 toiſes du multiplicande par les 6 du multiplicateur, ce qui n'a aucune difficulté.

Pour les 3 pieds du multiplicateur on prendra la moitié des 16 toiſes du multiplicande. Car ſoit AH de 3 piés, il eſt évident qu'en multipliant le rectangle AC par une toiſe lineaire, on auroit autant de toiſes cubes au produit, qu'il contiendroit de toiſes quarrées. Or en le multipliant par 3 pieds, on a un ſolide une fois plus petit qu'en le multipliant par 6. Donc ce ſolide eſt égal à la moitié des 16 toiſes du multiplicateur AC, c'eſt-à-dire, qu'il eſt de 8 toiſes. Fi. 185

Il reſte à multiplier les 2 pieds courant ſur toiſe du multiplicande AC, par tout le multiplicateur AE.

Pour cela il faut conſiderer que ſi au lieu de 2 pieds courant ſur toiſe, c'eſt-à-dire, au lieu du tiers de la toiſe quarrée on avoit cette toiſe entiere à multiplier

par 6 toiſes 3 pieds, on auroit pour le produit, 6 toiſes 3 pieds cubes courant ſur toiſe ; car alors on auroit un parallelipipede d'une toiſe quarrée de baſe ; & de 6 toiſes & demie de hauteur, qui contiendroit évidemment 6 toiſes & 3 pieds cubes courant ſur toiſe. Cela bien obſervé, il s'enſuit que puiſque 2 pieds courant ſur toiſe ſont le tiers de la toiſe, le parallelipipede formé de leur produit par les 6 toiſes 3 pieds de hauteur de EC, ne ſera que le tiers de celui qui auroit une toiſe entiere de baſe, c'eſt-à-dire de 6 toiſes 3 pieds.

Ainſi pour ces deux pieds, on dira d'abord, le tiers de 6 eſt 2, qu'on poſera aux unités des toiſes ; puis le tiers de 3 pieds eſt un pied, qu'on poſera à la colomne des pieds. Additionnant enſuite tous les différens produits de AC multiplié par AE, on aura 106 toiſes & un pied cubes pour la ſolidité totale du parallelipipede EC.

439. On voit par cet exemple, que le calcul des ſolides ſe fait de la même maniere que celui des ſuperficies ; c'eſt-à-dire, *qu'il faut prendre ſur les toiſes du multiplicande, les pieds & les pouces du multiplicateur, relativement aux parties aliquotes qu'ils contiennent de la toiſe*,

ſe, & qu'il faut prendre ſur tout le multiplicateur, ſçavoir, ſur les toiſes, les pieds, les pouces, &c. qu'il contient, *les pieds & les pouces du multiplicande relativement auſſi aux parties aliquotes qu'ils ſont de la toiſe.*

Tout cela ne paroît pas avoir beſoin d'un plus grand détail après ce qui a été expliqué n. 85. de l'Arithmétique & dans la Planimétrie, n. 330.

THEOREME II.

440. *Les pyramides droites ou obliques de même baſe & de même hauteur ſont égales* (*a*).

441. Le cône pouvant être conſideré comme une pyramide d'une infinité de côtés, il s'enſuit que *les cônes droits ou obliques, de même baſe & de même hauteur, ſont égaux.*

THEOREME III.

442. *Toute pyramide eſt le tiers d'un priſme de même baſe & de même hauteur que la pyramide.*

(*a*) Ce Théoreme & les ſuivans ſont démontrés dans l'*Arithmétique & la Géométrie de l'Officier.*

Pour avoir la ſolidité du priſme, il faut multiplier ſa baſe par ſa hauteur ; donc pour avoir la ſolidité d'une pyramide, il faut multiplier ſa baſe par le tiers de ſa hauteur.

THEOREME IV.

443. *Tout cône eſt le tiers d'un cylindre de même baſe & même hauteur que le cône.*

Car le cône eſt une pyramide d'une infinité de côtés, & le cylindre un priſme de même nombre de côtés. Or la pyramide eſt le tiers du priſme de même baſe & même hauteur. Donc le cône eſt auſſi le tiers du cylindre de même baſe & de même hauteur.

Ainſi puiſque pour avoir la ſolidité du cylindre, il faut multiplier ſa baſe par ſa hauteur, pour avoir celle du cône, il ne faut donc multiplier ſa baſe que par le tiers de ſa hauteur.

444. Si la pyramide ou le cône ſont tronqués par un plan parallele à leur baſe, on en cherchera la ſolidité comme s'ils étoient entiers ; on déterminera enſuite la ſolidité de la partie tronquée ; on ôtera cette ſolidité de la premiere, le reſte ſe-

ra la solidité de la pyramide ou du cône tronqué.

On suppose dans ce calcul, qu'on connoisse la hauteur de la pyramide ou du cône entier, avec les bases supérieure & inferieure. Cette hauteur peut se trouver avec assez de précision pour la pratique, si la pyramide ou le cône sont peu élevés, en appliquant deux longues régles sur deux côtés de la pyramide ou du cône. Ces régles donneront le prolongement de ces côtés, & elles se rencontreront dans un point qui sera le sommet de la pyramide ou du cône. On abaissera ensuite de ce point une perpendiculaire sur la base de la partie tronquée; cette perpendiculaire donnera la hauteur cherchée, on achevera après cela le toisé de la pyramide ou du cône tronqué, comme on vient de le dire.

445. Si la pyramide ou le cône tronqué sont fort élevés, on pourra se servir de cette méthode pour connoître la hauteur de la partie tronquée.

Soit le cône tronqué droit ABCD, Fi. 186. (tout ce que l'on fera pour trouver la hauteur de sa partie tronquée, pourra s'appliquer aussi à la pyramide tronquée.) On considerera ce cône comme s'il étoit entier, & pour cet effet, on imaginera

ſes côtés AD, BC, prolongés juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent au point S, qui ſera ſon ſommet.

On conſtruira le profil, ou la coupe de ce cône ſur le papier, de cette maniere.

On fera d'abord une échelle: on tirera enſuite la ligne AB, à laquelle on donnera autant de toiſes de l'échelle que cette ligne en a ſur le terrain. Sur le point P, milieu de AB, on élevera la perpendiculaire indéfinie PS. On prendra PR égale au rayon de la baſe ſupérieure DC, & l'on élevera la perpendiculaire RD, qu'on fera égale à la hauteur du cône tronqué. On tirera par A & par D la ligne AD, qu'on prolongera juſqu'à ce qu'elle rencontre PS en S, & l'on aura alors PS déterminée. On verra en portant ſur l'échelle cette ligne PS, le nombre de parties qu'elle en contiendra. On ôtera enſuite RD, c'eſt-à-dire la hauteur du cône tronqué, de PS, le reſte ſera la hauteur du petit cône retranché.

THEOREME V.

446. *La ſphere eſt les deux tiers d'un cylindre qui a pour baſe un grand*

cercle de la ſphere, & pour hauteur le le diamétre de ce cercle.

Pour avoir la ſolidité de ce cylindre, il faut multiplier ſa baſe par ſa hauteur, c'eſt-à-dire, la ſurface d'un grand cercle de la ſphere par ſon diamétre *. Or puiſque la ſphere en eſt les deux tiers, il faut pour en avoir la ſolidité, trouver d'abord la ſuperficie de ſon grand cercle, multiplier enſuite cette ſuperficie par les deux tiers du diamétre de la ſphere; ou ſi l'on veut, par ce diamétre entier, & en ce cas, il faudra prendre pour la ſolidité de la ſphere, les deux tiers du produit. *N.414.

Pour trouver, par exemple, la ſolidité de la terre, on cherchera d'abord la ſuperficie de ſon grand cercle, en multiplant ſa circonférence (9000 lieues) par la moitié de ſon rayon, ou le quart de ſon diamétre (715 lieues.) On multipliera enſuite la ſuperficie de ce cercle (6441750 lieues quarrées) par le diamétre de la terre, (2863 lieues) & prenant les deux tiers du produit, (18-442-730-250,) l'on aura la ſolidité du globe terreſtre (12295153500 lieues cubes).

447. On meſurera les corps ou les

ſolides qui peuvent ſe trouver dans l'uſage ordinaire, & qui différeront de ceux dont on vient de donner la meſure, en les conſiderant comme formés de parallelipipedes, de priſmes, de pyramides, &c. ſuivant la figure de ces corps; les ſolidités de chacun de ces ſolides étant jointes enſembles, donneront celle du corps qui en ſera compoſé.

448. On meſurera les corps creux comme s'ils étoient pleins, ſans faire attention à leur cavité; on meſurera enſuite cette cavité en particulier; & ôtant ſa ſolidité de la premiere, le reſte ſera celle du corps creux. Par exemple, pour avoir la ſolidité de la maçonnerie d'un puits, on le conſidérera comme s'il n'avoit point de vuide, & l'on en cherchera la ſolidité dans cette ſuppoſition. On meſurera enſuite la ſolidité du vuide du puits, on l'ôtera de la premiere; & le reſte ſera le toiſé demandé.

449. On pourra toiſer les corps fort irréguliers en les mettant dans un vaiſſeau régulier, dont le vuide puiſſe être meſuré, enſuite on emplira ce vaiſſeau d'eau; après quoi on en ôtera le corps à meſurer. Il eſt évident qu'il ſe fera un vuide dans le haut du vaiſſeau égal à la capacité ou à la ſolidité du corps qui étoit

dedans ; c'eſt pourquoi en meſurant cette partie vuide du vaiſſeau, on aura la ſolidité du corps propoſé.

FIN.

De l'Imprimerie de J. CHARDON.

TABLE

Des Articles & des Titres de cet Ouvrage.

DEs principes de l'Arithmétique & de la Numération, page 1
De l'Addition, 9
De la Souſtraction, 21
Preuve de l'Addition par la Souſtraction, 38
De la Multiplication, 40
Multiplication par livres, ſols & deniers, 73
De la Diviſion, 88
Preuve de la Multiplication par la Diviſion, 119
De la Regle de Trois, 130
Des Regles de Trois compoſées, 145
De la Regle de Compagnie, 149
De la Regle de Compagnie par tems, 155
Définitions des propoſitions dont on ſe ſert dans la Géométrie, & de ſes premiers principes ou axiomes, 159

Des lignes & des ſuperficies, 162
Du Cercle & de ſa circonférence, 170
De l'angle, 184
Des lignes perpendiculaires & des obliques, 203
Des lignes paralleles, 213
Des tangentes, 226
Des angles dont le ſommet eſt à la circonférence du cercle, 232
Des triangles, 239
De l'égalité des triangles, 250
Uſages des triangles pour la meſure des lignes inacceſſibles, 257
De l'échelle d'un plan 261
Maniere de faire la Carte d'un pays, 276
Des quadrilateres, 284
Des polygones, 291
De la planimétrie ou meſure des ſurfaces planes. 334
Des ſolides, 382
De la meſure des ſurfaces des corps, 394
De la Stéréométrie ou meſure des ſolides, 399

Fin de la Table.

Fautes qu'il faut corriger avant la lecture de cet Ouvrage.

Page 59, *ligne premiere*, ſeptiers 24 boiſſeaux, *écrivez*, ſeptiers de 24 boiſſeaux.

Page 70, effacez la ligne qui eſt ſous le nombre à multiplier 310.9, & tirez une autre ligne ſous le multiplicateur par 425 liv. 6 ſ.

Page 89, *écrivez* un 4 ſous le 2 du dividende abbaiſſé à côté du reſte 1 de la ſeconde opération de la diviſion de cette page.

Page 106, dans la preuve de la ſeconde diviſion de cette page, au lieu du multiplicateur 2000, *écrivez* 1200.

Page 110, *ligne* 7 & 8, à côté, *écrivez* ôté.

Page 112, *ligne* 12, retranchés du dividende, *liſez*, retranchés du chiffre 6 du dividende.

Page 132, *ligne* 5, premier terme 12, *écrivez* premier terme 3.

Page 132, *ligne* 7, ce même nombre 12, *écrivez* ce même nombre 3.

Page 193, *ligne* 13, ſa partie, *ajoutez* DAC.

Page 194, *seconde ligne* du n. 92, un angle égal donné, *liſez* un angle égal à un angle donné.

Page 217, *à la marge*, figure 62, *écrivez* figure 63.

Page 220, *ligne* 10, enterieur, *écrivez* exterieur.

Page 231, *ligne* 4, & qui, *écrivez* ces perpendiculaires.

Il faut obſerver que dans les figures de cet Ouvrage on en a cotté deux, par inadvertance, du même nombre 88, *& que pour diſtinguer la ſeconde de la premiere on l'a accompagnée dans la planche de deux petites étoiles* **. *C'eſt celle qui eſt citée au bas de la page* 243.

AVIS AU RELIEUR.

Le Relieur placera les 19 planches de cet Ouvrage à la fin; il les arrangera ſuivant leur ordre numérique, & de maniere qu'en les déployant elles ſortent hors du livre vers la droite.

Livres qui ſe vendent chez le même Libraire.

Ouvrages de M. BELIDOR, *ancien Profeſſeur Royal des Mathématiques, Chevalier de l'Ordre Militaire de S. Louis, &c.*

NOuveau Cours de Mathématique à l'uſage de l'Artillerie & du Génie, où l'on applique les parties les plus utiles de cette Science à la théorie & à la pratique des differens ſujets qui peuvent avoir rapport à la Guerre. *in-quarto*, avec 34 planches, 15 l.

La Science des Ingénieurs dans la conduite des travaux de Fortification & d'Architecture civile, *in*-4. grand papier, avec plus de 50 Planches, 24 l.

L'Architecture Hydraulique, ou l'Art de conduire, d'élever, & de ménager les eaux pour tous les beſoins de la vie. *Premiere Partie;* en deux volumes *in-quarto;* grand papier, enrichi de cent grandes Planches, 40 liv.

On donnera au Public l'année prochaine la *ſeconde Partie* du même Ouvrage, &c. en deux gros Volumes *in*-4. grand papier.

Ouvrages de feu M. l'Abbé DEIDIER, *ancien Profeſſeur Royal des Mathématiques aux Ecoles d'Artillerie de la Fére.*

L'Arithmétique des Géométres, ou nouveaux Elémens de Mathématique, contenant l'Arithmétique & l'Algebre, *in*-4. 15 l.

La Science du Géomètre, ou la théorie & la pratique de la Géométrie mis à la portée de tout le monde, *in*-4. avec près de 50 Planches, 15 l.

La Mesure des Surfaces & des Solides par la connoissance des centres de gravité & par l'Arithmétique des Infinis, *in*-4. avec figures, 12. l.

Le Calcul différentiel & le Calcul intégral expliqués & appliqués à la Géométrie, *in*-4. avec figures, 15 l.

Mécanique générale, pour servir d'introduction aux Sciences Phisico-Mathématiques, *in*-4. avec figures, 15 l.

Le parfait Ingenieur François. Nouvelle édition augmentée, *in*-4. avec 50 Planches, 15 liv.

Elemens généraux des parties des Mathématiques les plus nécessaires à l'Artillerie & au Génie : en deux volumes *in*-4. avec plus de 60 Planches, 24 l.

Traité de Perspective théorique & pratique ; brochure *in*-4. 3 l. 10 s.

Ouvrages de M. OZANAM, *de l'Académie Royale des Sciences.*

Cours de Mathématique, qui comprend les parties de cette Science les plus utiles à un homme de guerre ; sçavoir, l'introduction aux Mathématiques ; les Elemens d'Euclides ; l'Arithmétique ; la Trigonométrie, avec les Tables des Sinus & des Logarithmes ; la Géométrie théorique & pratique ; la Fortification reguliere & irreguliere ; la Mécanique ; la Perspective ; la Géographie & Cosmographie ; la Gnomonique. En cinq

vol. *in*-8°. avec plus de 200 planches. 40 l.

Les Recréations Mathématiques & Phyſiques. Nouvelle édition, en 4 Volumes *in*-8. avec beaucoup de figures, 20 l.

Les Elemens d'Euclides expliqués, avec l'uſage de chaque propoſition pour toutes les parties des Mathématiques. Par le R. P. Deſchalles. Nouvelle Edition, corrigée & augmentée, *in-douze* 1746. avec 20 planches. 3 l.

Traité de l'Arpentage & du Toiſé, avec un nouveau Tarif du Toiſé des bois de charpente. Nouvelle édition augmentée, *in*-12. avec Figures, 1747. 3 l.

La Géométrie pratique, contenant la Trigonométrie, la Longimétrie, la Planimétrie, & la Stereométrie, avec un Traité de l'Arithmétique par Géométrie; *in-douze*, avec figures. 2 l. 10 ſ.

Uſage du Compas de proportion & de l'Inſtrument univerſel, avec un Traité de la diviſion des champs. Nouvelle édition, avec figures, 1748. 2 l. 10.

Méthode pour lever les Plans & les Cartes de Terre & de Mer, avec inſtrumens & ſans inſtrumens, *in-douze*, avec figures. 2 l.

Ouvrages de M. LE BLOND, *Profeſſeur de Mathématique des Pages de la Grande Ecurie du Roy.*

L'Arithmétique & la Géométrie de l'Officier, contenant les élemens de ces deux Sciences appliquées aux différens beſoins de l'Homme de guerre, en deux volumes *in*-8. enrichis de 45 Planches, 1748. 12 l.

Abregé d'Arithmétique & de Géométrie à l'uſage des jeunes Militaires, *in*-12. avec figures, 1748. 3 l.

Elémens de Fortification, contenant ce qu'il y a de plus essentiel à observer dans une Place forte, pour initier avec facilité les jeunes Militaires dans l'étude de cette Science, *in-douze*, avec figures. Nouvelle Edition augmentée. 3 l.

Elemens de la guerre des Sieges à l'usage des jeunes Militaires, contenant l'Artillerie, l'Attaque & la Deffense des Places, avec un petit Dictionnaire des termes, en trois Volumes *in*-8. avec quantité de Figures. 15 livres.

Essai sur la Castramétation, où l'on donne la maniere de former, tracer & mesurer les Camps, *in*-8. avec Figures. 6 liv.

Art militaire.

Art de la Guerre par principes & par régles. Ouvrage de M. le Maréchal de Puysegur, mis au jour par M. le Marquis de Puisegur son fils, Brigadier d'Infanterie, Colonel du Régiment de Vexin, Volume *in-folio*, grand papier, en deux Parties, enrichi de Vignettes & de plus de 40 grandes Planches, 1748, 60 l.

—— Le même Ouvrage, en deux volumes *in-octavo*. *Sous presse*.

Memoires historiques & Militaires de Messire Jacques de Chastenet, Chevalier, Seigneur de Puysegur, Colonel du Regiment de Piedmont, & Lieutenant General des Armées du Roi. Avec des Instructions Militaires, en deux volumes *in*-12. Nouvelle édition, 1748. 5 l.

Sentimens d'un Homme de guerre sur le Systême de M. le Chevalier Follard, par rapport

à la colonne & au mêlange des différentes armes d'une armée, *in*-4. avec figures. *La Haye.*

Mémoires d'Artillerie de M. Surirey de Saint-Remy. Nouvelle édition considérablement augmentée, avec une ample Table des Matieres, en trois Volumes *in*-4. enrichis de Vignettes & de plus de deux cens Planches. 1745. 45 l.

Théorie nouvelle sur le Mécanisme de l'Artillerie, par M. Dulac, Officier d'Artillerie du Roy de Sardaigne, *in*-4. avec près de 40 Planches, 15 l.

Essay de l'application des forces centrales aux effets de la poudre à canon, par M. Bigot de Morogues, *in*-8. 2 l. 10.

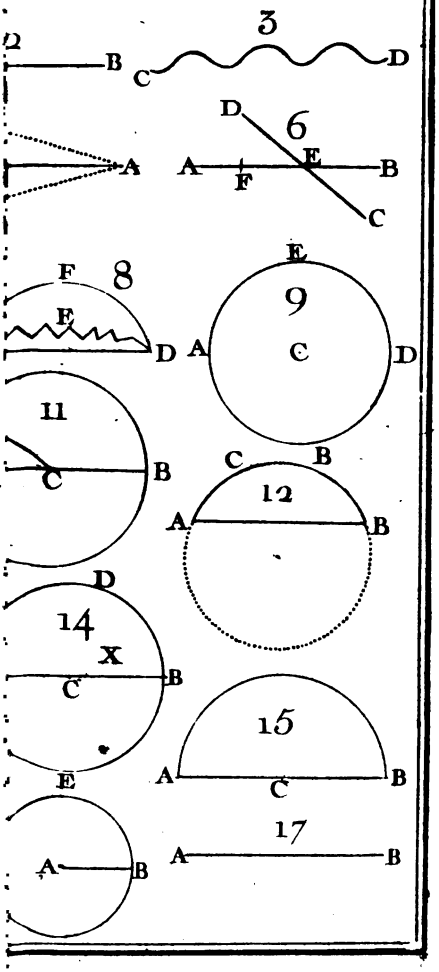
De l'Attaque & de la Defense des Places, avec un Traité pratique des Mines, par M. le Maréchal de Vauban, & un Traité de la guerre en général. Nouvelle édition augmentée, en deux Volumes *in*-8. avec plus de 50 Planches. *La Haye*, 12 l.

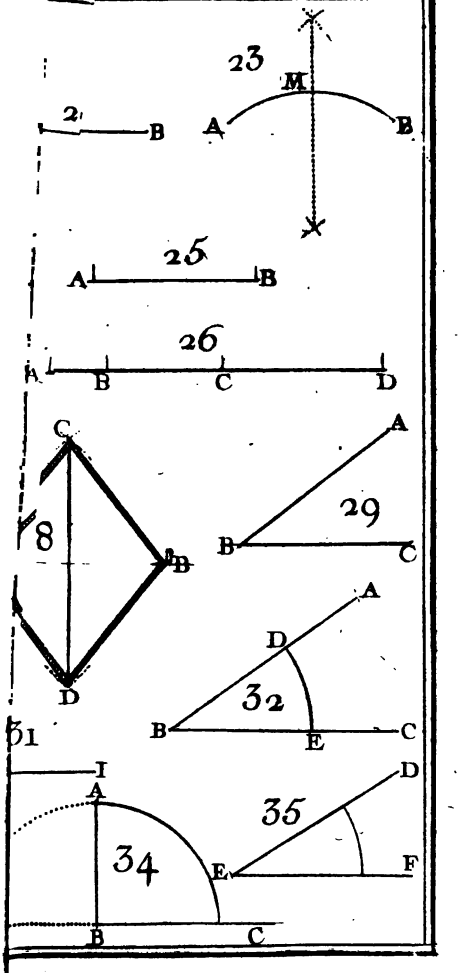
Traité des Feux d'artifice pour le Spectacle, par M. Frezier, Directeur des Fortifications de Bretagne. Nouvelle édition considérablement augmentée, *in*-8. avec fig. 1747. 6 l.

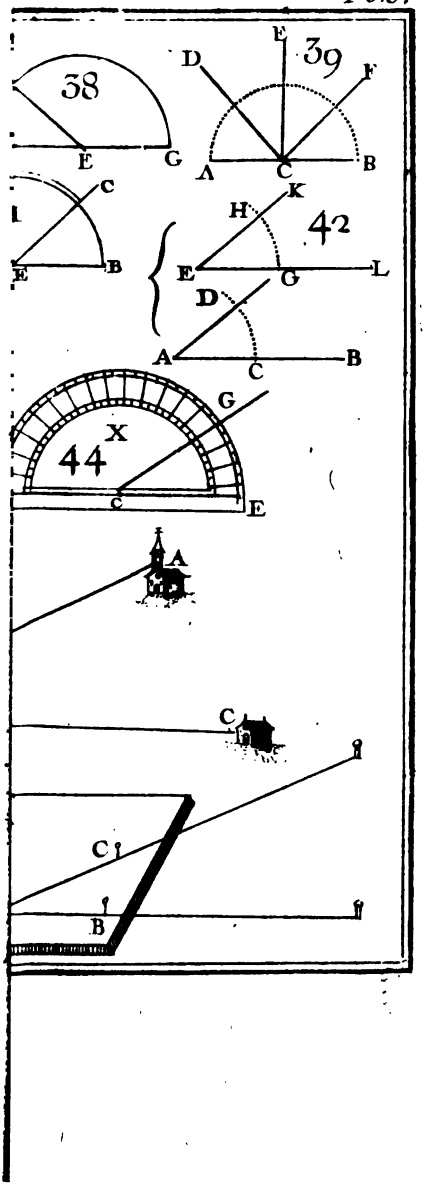
Mémoires de M. Goulon, Généralissime des Armées de l'Empereur, sur l'Attaque & la Defense d'une Place; avec la Relation du Siege d'Ath, *in*-8. avec fig. *La Haye*, 4 l. 10.

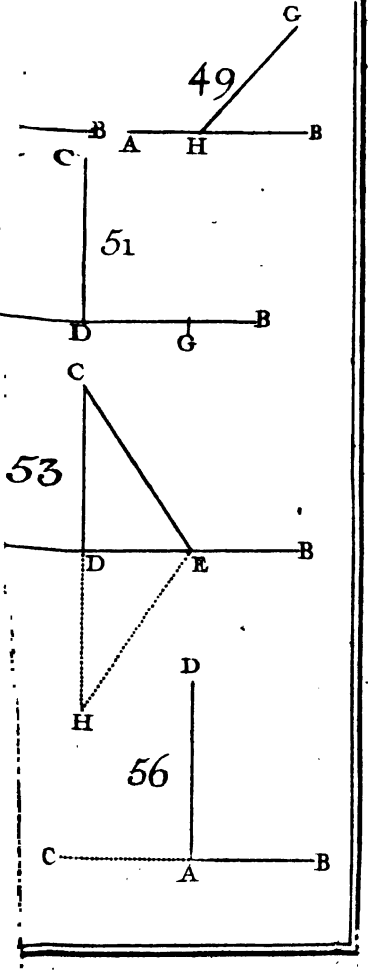
L'Ingenieur François contenant la Géometrie pratique, & la Fortification suivant M. de Vauban, *in-octavo*, 6 l.

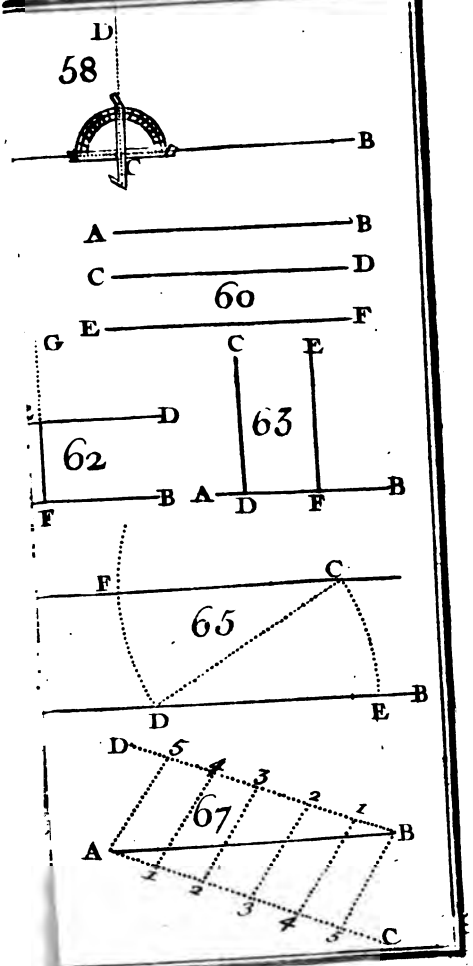
Les regles du dessein & du Lavis pour l'Architecture Militaire & Civile. Par M. Buchotte, Ingenieur du Roy. Nouv. édit. augmentée, *in-octavo*, avec fig. 5 liv.

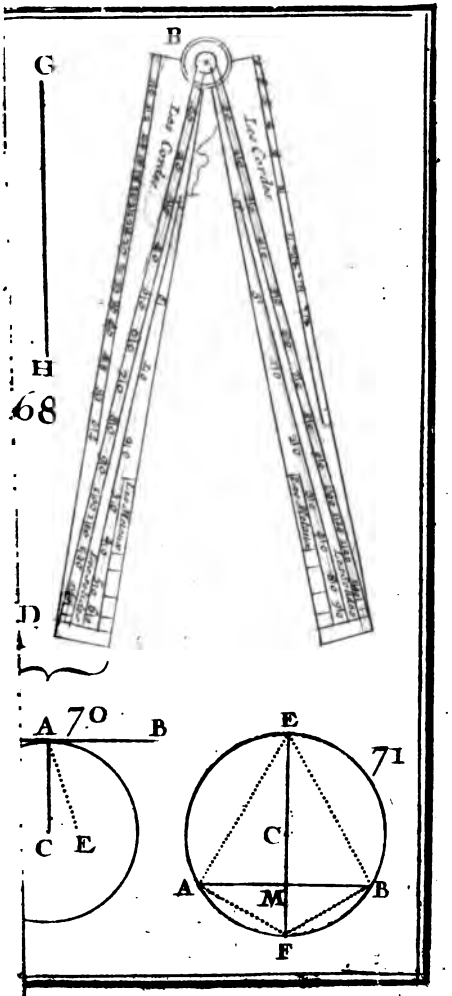

3
D
B
C
D
6
D
A
E
A
F
B
C
E
F
8
9
E
A
C
D
D
11
C
B
C
B
12
A
B
D
14
X
C
B
E
15
A
C
B
17
A
B
A
B

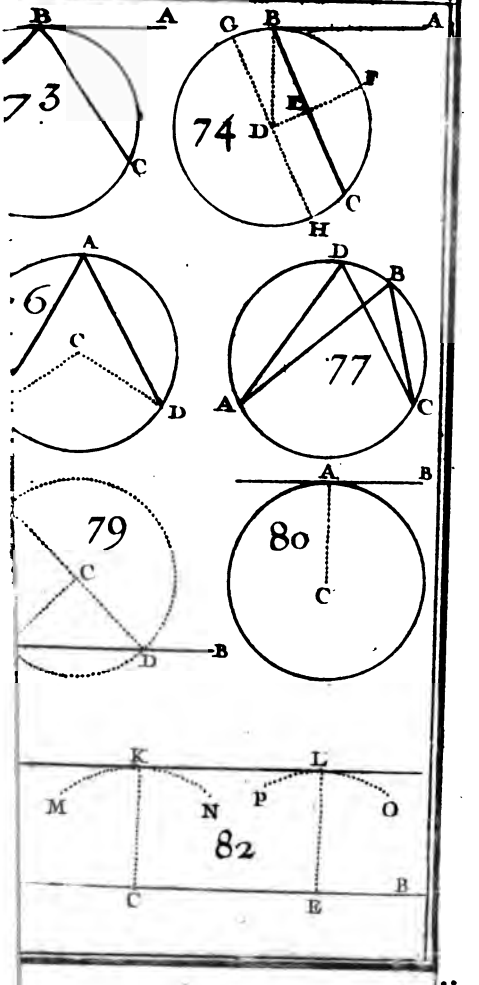

23
M
2
B
A
B
25
A
B
26
A
B
C
D
C
8
B
D
A
29
B
C
A
D
32
B
E
C
31
I
A
34
B
C
35
D
E
F

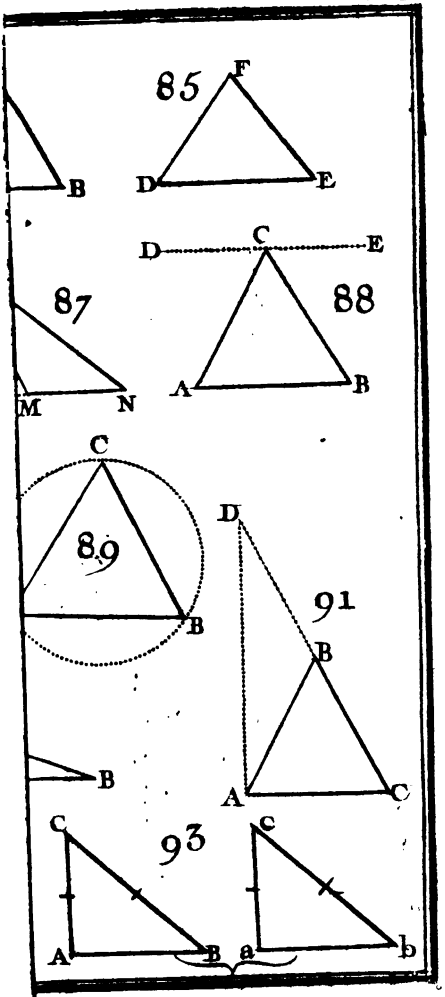

38
E
G
39
D
E
F
A
C
B
C
E
B
H
K
42
E
G
L
D
A
C
B
X
44
G
C
E
A
C
C
B

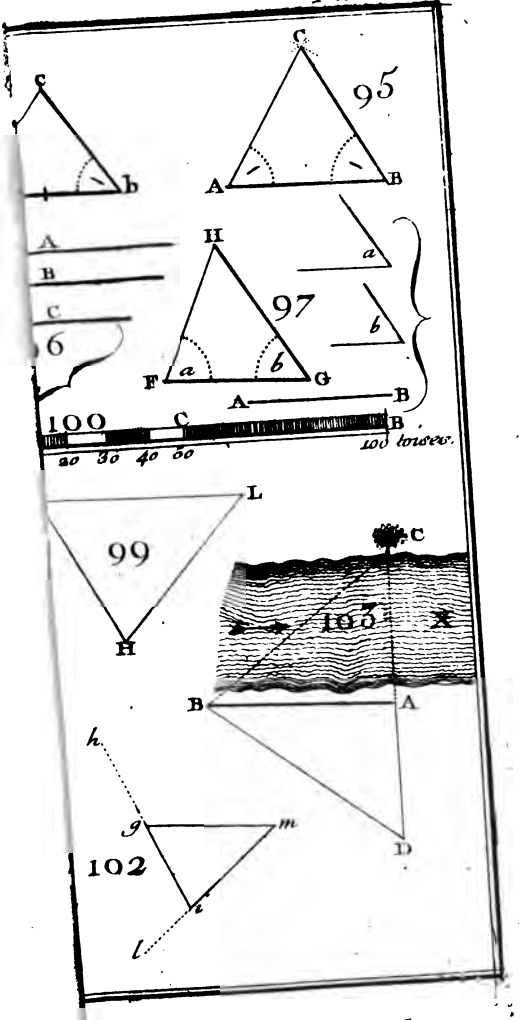

C
49
B
A
H
B
C
51
D
G
B
C
53
D
E
B
H
D
56
C
A
B

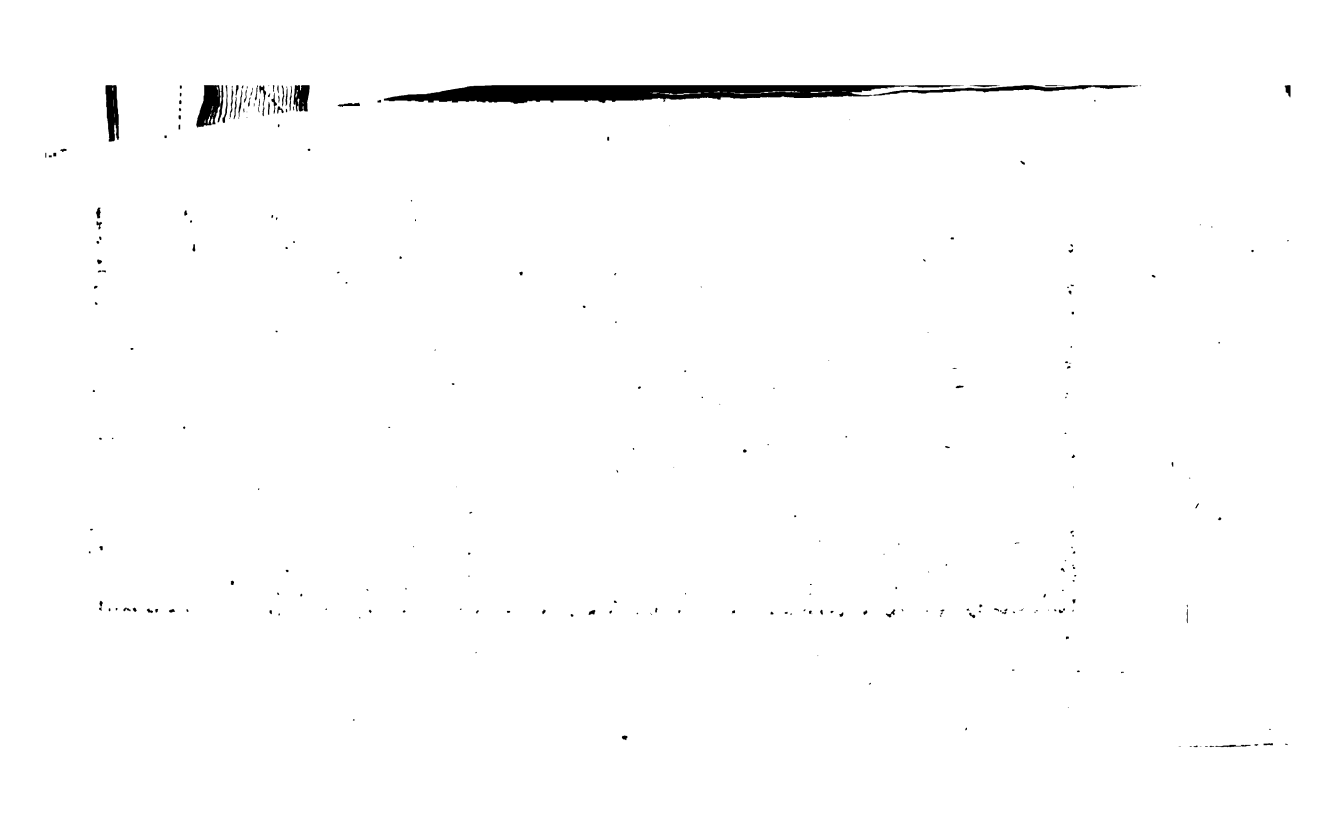

D
58
B
A
B
C
D
60
E
F
G
C
E
D
63
62
B
A
D
F
B
F
F
C
65
D
E
B
D
5
4
3
2
1
67
A
B
1
2
3
4
5
C

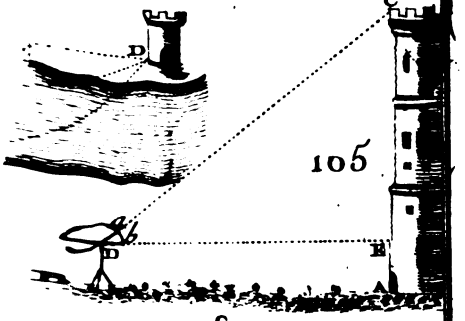

B
G
H
68
D
Les Coulisses
Les Cordes
A
70
B
C
E
71
E
C
A
M
B
F

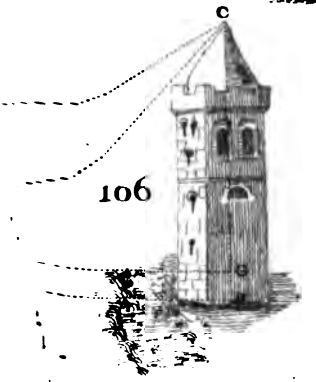

B
A
C
73
G
B
A
F
E
74
D
C
H
A
C
D
6
D
B
77
A
C
A
B
79
80
C
C
D
B
K
L
M
N
P
O
82
C
E
B

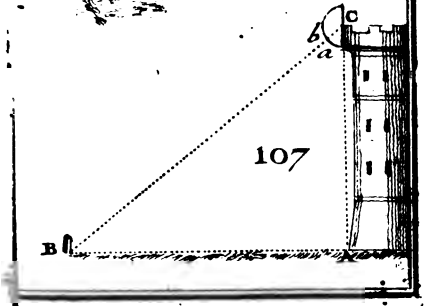

85
F
B
D
E
C
D
E
87
88
M
N
A
B
C
89
B
D
91
B
A
C
B
C
93
c
A
B
a
b

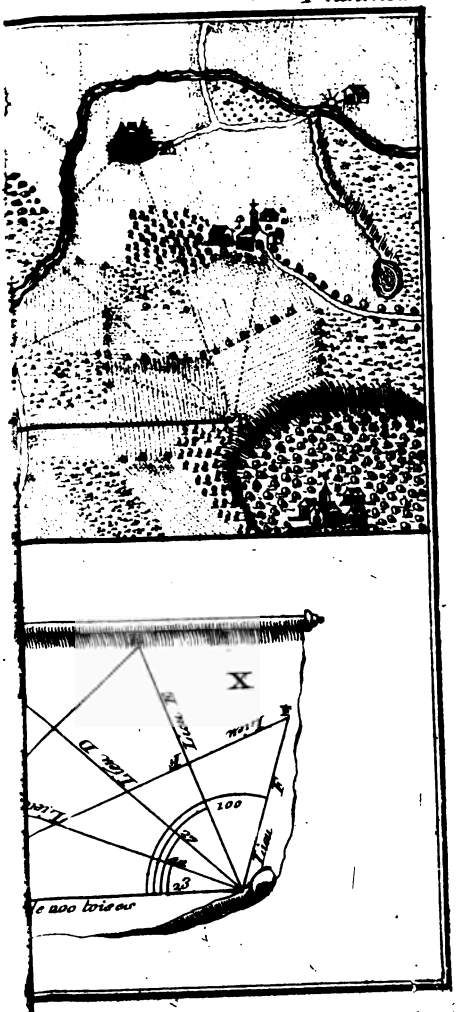

C
95
A
B
C
b
A
B
C
6
H
97
F
a
b
G
a
b
A
B
100
C
B
20 30 40 60
100 toises.
L
99
H
C
107
B
A
h
g
m
102
i
l
D

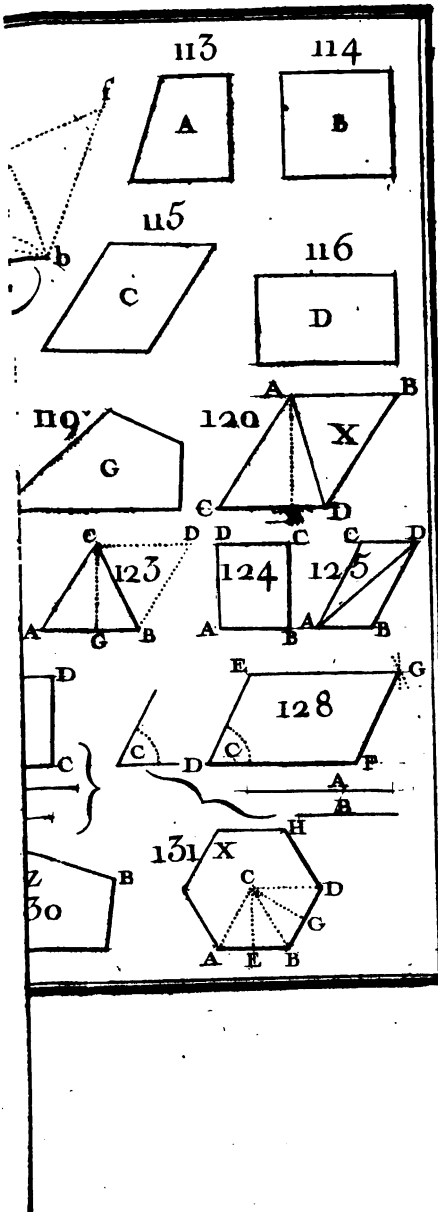


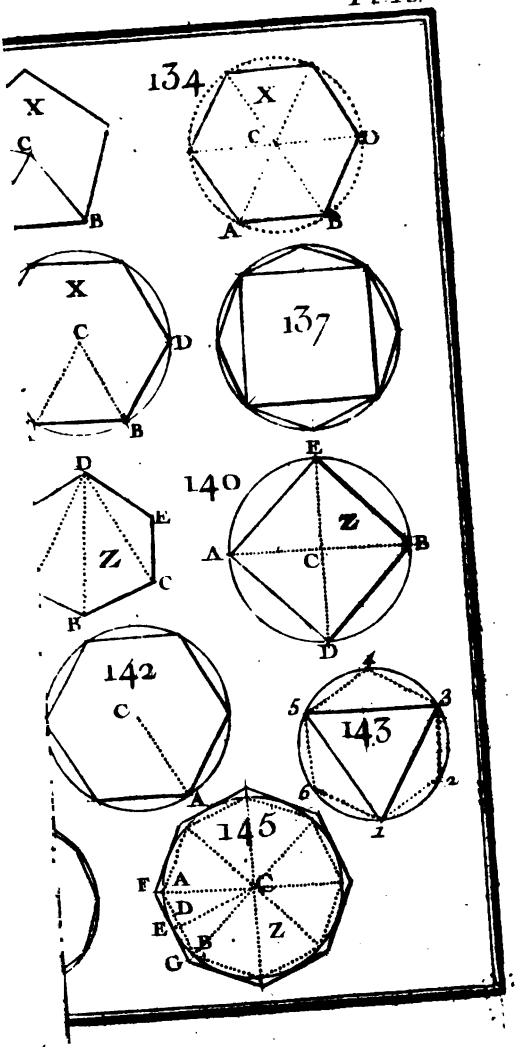

C
D
105
a
b
D
E

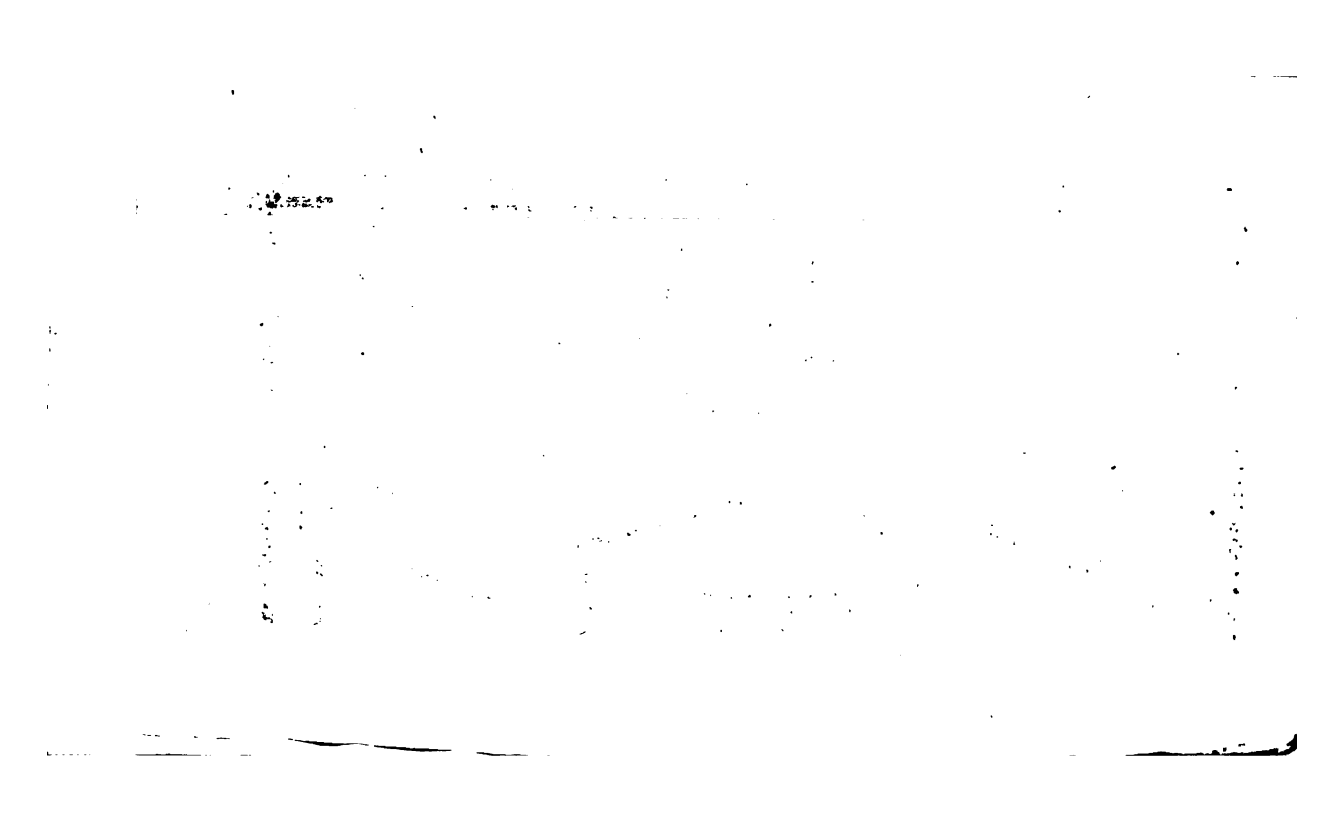

C
106

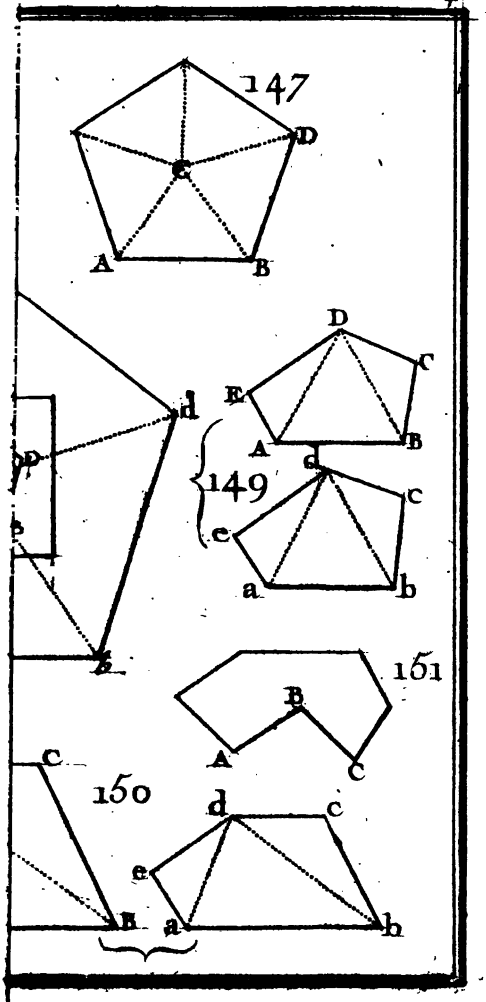

C
b
a
107
B


X
100
200
300
de 200 toises


113
A
114
B
f
b
115
C
116
D
119
G
120
X
A
B
C
D
123
124
125
E
G
128
F
H
131
X
Z
30


X
C
B
134
X
C
D
A
B
X
C
D
B
137
D
E
Z
C
B
140
E
Z
A
B
C
D
142
C
A
143
4
5
3
2
6
1
145
F
A
C
D
E
B
Z
G




147
D
C
A
B
d
D
E
C
A
B
149
c
c
c
a
b
151
B
A
C
150
C
d
c
e
a
b

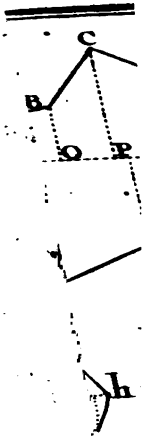
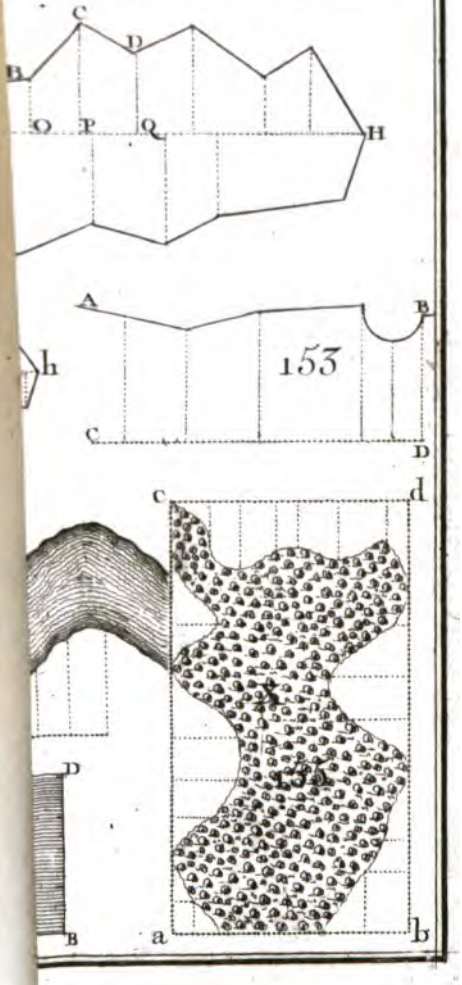
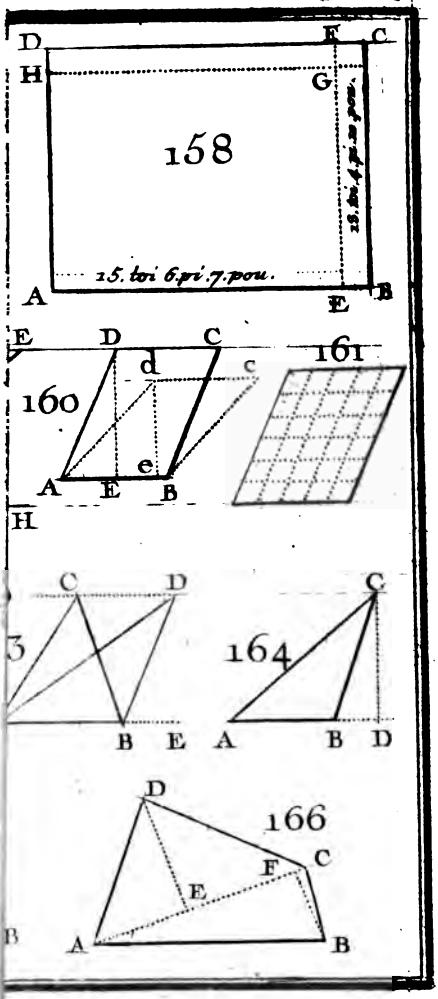

C
B
O
P
h

Planche. 15.




D
F
C
H
G
158
15. toi 4 pi 8 pou.
15. toi 6 pi 7 pou.
A
E
B
E
D
C
d
c
160
161
A
E
e
B
H
C
D
3
B
E
C
164
A
B
D
D
166
C
F
E
B
A
B

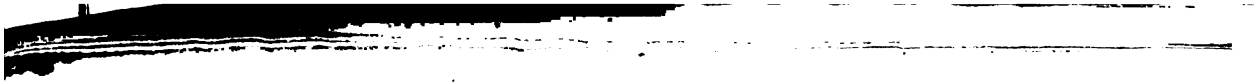
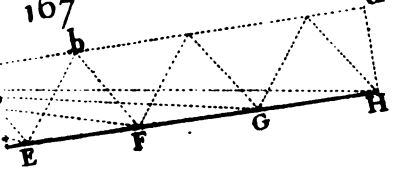
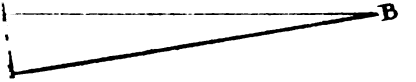


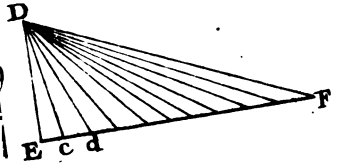
Planche 17

167

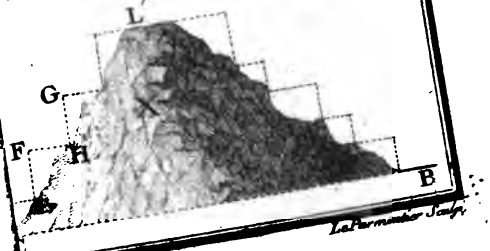


168.





171



Le Normand Sculp.

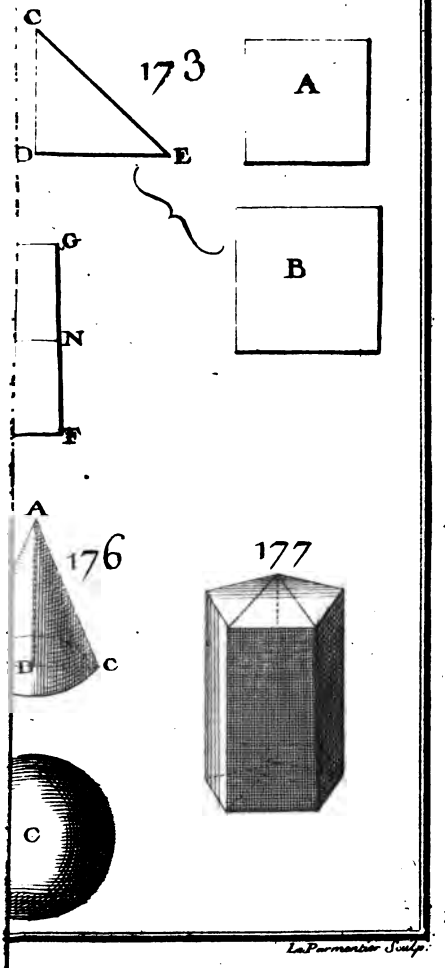



Planche 18.